ГЛАВА 1

ОБИКНОВЕНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

А. Обикновено диференциално уравнение от n-ти ред – дефиниция, основни понятия

Дефиниция 1 *Уравнение от вида:*

$$F[x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}] = 0, \tag{1.1}$$

*където $y = y(x)$ е неизвестна функция, а $x \in (a, b)$ – независима променлива, се нарича **обикновено диференциално уравнение от n-ти ред.***

Дефиниция 2 *Казваме, че n пъти диференцируемата функция $y = y(x)$, $x \in (a, b)$ е решение (интегрална крива) на* (1.1)*, ако*

$$F[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)] \equiv 0,$$

Уравнението (1.1) написваме (ако е възможно) във вида:

$$y^{(n)} = f[x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}], \tag{1.2}$$

което се нарича *нормален вид на* (1.1):

* при $n = 1 \rightarrow y' = f(x, y)$ - обикновено диференциално уравнение от *първи ред*.;

* при $n = 2 \rightarrow y'' = f(x, y, y')$ - обикновено диференциално уравнение от *втори ред* и т.н.

Дефиниция 3 *Под **общо решение** на* (1.1) *разбираме фамилия интегрални криви с уравнение $y = y(x, C)$ или $\Phi(x, y, C) = 0$, от която могат да се получат всички решения, с някои изключения.*

Дефиниция 4 *Под **частно решение** на (1.1) разбираме решение, което се получава от общото решение, при конкретна стойност на константата C.*

Дефиниция 5 *Под **особено решение** на (1.1) разбираме решение, което не се получава от общото решение при никоя стойност на константата C.*

Б. Задачи на Коши и гранични задачи

Задачата на Коши се отнася до намиране такова решение $y = y(x, C)$ на диференциалното уравнение $y' = f(x, y)$, което удовлетворява начални условия $x = x_0, y = y_0$, т.е. $y_0 = y(x_0, C)$. Геометрически това означава, че се търси интегрална крива (частно решение) от фамилията, която минава през дадена точка $M_0(x_0, y_0)$.

Тази задача не винаги има решение, а ако има, не винаги е единствено.

Теорема 1 *(за съществуване на задачата на Коши). Решението на задачата на Коши за уравнението $y' = f(x, y)$ съществува и е единствено, ако функцията $f(x, y)$ удовлетворява условията:*

1^0. *$f(x, y)$ е непрекъсната функция в правоъгълника*

$$D : \left| \begin{array}{l} |x - x_0| \le a \\ |y - y_0| \le b. \end{array} \right.$$

2^0. *$f(x, y)$ удовлетворява условието на Липшиц*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le k|y_1 - y_2|, \qquad k = const.$$

за всеки две точки $(x, y_1), (x, y_2) \in D$.

ГЛАВА 2

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ОТДЕЛЕНИ ПРОМЕНЛИВИ И ПРИВОДИМИ КЪМ ТЯХ

I. Диференциални уравнения с отделени променливи

Дефиниция 1 *Уравнение от вида*

$$P(x) + Q(y)y' = 0 \tag{2.1}$$

се нарича ***диференциално уравнение с отделени променливи с коефициенти $P(x)$ и $Q(y)$.***

От (2.1) и $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ имаме $P(x)\mathrm{d}x + Q(y)\mathrm{d}y = 0$ и след интегриране получаваме

$$\int P(x)\mathrm{d}x + \int Q(y)\mathrm{d}y = C, \qquad C = \mathrm{const.} \tag{2.2}$$

Теорема 1 *Уравненията* (2.1) *и* (2.2) *са еквивалентни.*

II. Диференциални уравнения, които се свеждат към такива с отделени променливи

А. Уравнение от вида

$$P_1(x)Q_1(y)\mathrm{d}x + P_2(x)Q_2(y)\mathrm{d}y = 0. \tag{2.3}$$

Делим двете страни на уравнение (2.3) на $P_2(x)Q_1(y) \neq 0$ и като интегрираме, получаваме

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\mathrm{d}y = C, \qquad C = \mathrm{const.}, \tag{2.4}$$

откъдето намираме общия интеграл $y = y(x, C)$.

Ako $P_2(a) = 0$, $Q_1(b) = 0$, получаваме *особени решения* $x = a$, $y = b$ на (2.3). Особените решения не се получават от общия интеграл $y = y(x, C)$ при никоя стойност на C.

Б. Хомогенно диференциално уравнение от първи ред

Дефиниция 2 *Уравнение от вида*

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0, \tag{2.5}$$

където $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ са хомогенни функции от една и съща степен (вж. модул 2, стр.28) се нарича ***хомогенно диференциално уравнение от първи ред.***

От (2.5) написваме $y' = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \varphi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$ и след полагане $\dfrac{y}{x} = z$, където z е непозната функция, $y = xz$, $y' = z + xz'$, уравнението (2.5) добива вида:

$$z + xz' = \varphi(z) \quad \text{или} \quad \frac{\mathrm{d}z}{\varphi(z) - z} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

а) ако $\varphi(z) \neq z$, тогава

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\varphi(z) - z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \ln C \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{\varphi(z) - z} = \ln(Cx) \Longrightarrow Cx = e^{\int \frac{\mathrm{d}z}{\varphi(z)-z}}$$

и заместваме $z = \dfrac{x}{y}$;

б) ако $\varphi(z) = z$ уравнението (2.5) приема вида $y' = \dfrac{y}{x}$, което е уравнение с отделени променливи, от вида (2.1).

В. Уравнение от вида

$$y' = f(ax + by), b \neq 0. \tag{2.6}$$

Като положим $ax + by = z \Longrightarrow a + by' = z' \Longrightarrow y' = \dfrac{z' - a}{b} \Longrightarrow \dfrac{z' - a}{b} = f(z)$ $\Longrightarrow z' = a + b.f(z) \Longrightarrow \int \dfrac{\mathrm{d}z}{a + b.f(z)} = \displaystyle\int \mathrm{d}x + C$. От последното уравнение намираме $z = z(x, C)$ и тогава общият интеграл на (2.6) е $ax + by = z(x, C)$.

Г. Обобщено хомогенно диференциално уравнение

Дефиниция 3 *Уравнение от вида*

$$y' = f\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big), \tag{2.7}$$

където a_i, b_i, c_i са константи, $i = \overline{1,2}$ се нарича ***обикновено обобщено хомогенно диференциално уравнение.***

1^0. Ако $c_1 = c_2 = 0$ уравнение (2.7) е хомогенно диференциално уравнение от вида (2.5), т.е. $y' = f\Big(\dfrac{a_1 + b_1\frac{y}{x}}{a_2 + b_2\frac{y}{x}}\Big) = \varphi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$ и полагаме $\dfrac{y}{x} = z$.

2^0. Ако $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow a_2 = k.a_1,\, b_2 = k.b_1$ и тогава

$$y' = f\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\Big) = F(a_1x + b_1y),$$

така получаваме уравнение от вида (2.6) или с отделени променливи.

3^0. Ако $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \dfrac{a_2}{a_1} \neq \dfrac{b_2}{b_1}$, т.е. правите $g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ се пресичат в точка $O'(\alpha, \beta)$. Координатите на точката $O'(\alpha, \beta)$ се получават от системата (2.8) (която има единствено решение):

$$\left| \begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{aligned} \right. . \tag{2.8}$$

Извършваме *транслация* на координатната система $K_2 : Oxy \longrightarrow K_2' : O'\xi\eta$ с вектор на транслацията $\overrightarrow{OO'}$ посредством формулите

$$\left| \begin{aligned} x = \xi + \alpha \\ y = \eta + \beta \end{aligned} \right| \Longrightarrow \left| \begin{aligned} \mathrm{d}x = \mathrm{d}\xi \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}\eta \end{aligned} \right. \Longrightarrow y' = \eta'.$$

Така получаваме: $\eta' = \dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = f\Big(\dfrac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\Big) = f\Big(\dfrac{a_1 + b_1\frac{\eta}{\xi}}{a_2 + b_2\frac{\eta}{\xi}}\Big) = \varphi\Big(\dfrac{\eta}{\xi}\Big)$, а полученото хомогенно диференциално уравнение решаване, като положим $\dfrac{\eta}{\xi} = z$.

Пример 2.1. Решете уравнението $(1 + y^2)\mathrm{d}x + (1 + x^2)\mathrm{d}y = 0$.

Решение. Делим двете страни на уравнението на $(1 + x^2).(1 + y^2) \neq 0$ и получаваме диференциално уравнение с отделени променливи

$$\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = 0 \Longleftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \operatorname{arctg} C$$

$$\Longrightarrow \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} C \Longrightarrow \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} C - \operatorname{arctg} x$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} C - \operatorname{arctg} x)$$

$$y = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} C) - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} C)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)} \Longrightarrow y = \frac{C - x}{1 + Cx} \quad \text{(общ интеграл в явен вид).}$$

Пример 2.2. Решете уравнението $e^{-y}(1 + y') = 1$.

Решение. Уравнението се свежда до отделени променливи така:

$$e^{-y}(1 + y') = 1 \Longrightarrow 1 + y' = e^y \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^y - 1 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{e^y - 1} = \mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{e^y - 1} = \int \mathrm{d}x + C \Longrightarrow I_1 = x + C.$$

От условието $e^y - 1 \neq 0 \Longrightarrow y \neq 0$, т.е. от общото решение изключваме абсцисната ос.

Решаваме интеграла I_1:

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}y}{e^y(1-e^{-y})} = \int \frac{\mathrm{d}(1-e^{-y})}{1-e^{-y}} = \ln|1-e^{-y}| = \ln|\frac{e^y-1}{e^y}|.$$

От $\ln|\frac{e^y-1}{e^y}| = x + C \Longrightarrow e^{x+C} = \frac{e^y-1}{e^y}$ (общ интеграл в неявен вид).

Особено решение на уравнението е $y = 0$.

Пример 2.3. Решете уравнението $x\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x + y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y = 0$, при начално условие $y(0) = 1$, т.е. да се намери онази интегрална крива от фамилията решения, която минава през точката $M(0,1)$.

Решение. Делим уравнението на $\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2} \neq 0$ и получаваме диференциално уравнение с отделени променливи

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = -C$$

$$-\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2) - \frac{1}{2}\int (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-y^2) = -C$$

$$\Longrightarrow \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C.$$

$$\text{От}\quad y(0) = 1 \Longrightarrow \sqrt{1-0^2} + \sqrt{1-1^2} = C \Longrightarrow C = 1.$$

Следователно *търсената интегрална крива* има уравнение

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1.$$

Особените решения на диференциалното уравнение са четири прави с уравнения $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, които се получават от условията $\sqrt{1-x^2} = 0$, $\sqrt{1-y^2} = 0$ (*особените решения не се получават от общия интеграл*, $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C$, при някои стойности на C). Само особеното решение $y = 1$ е решение на задачата. Следователно през точката (0,1) минават две интегрални линии.

Пример 2.4. Решете уравнението $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \sqrt{y^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решение. Написваме уравнението във вида $(y + \sqrt{y^2-x^2})\mathrm{d}x = x\mathrm{d}y$ и тогава коефициентите $P(x,y) = y + \sqrt{y^2-x^2}$ и $Q(x,y) = x$ са хомогенни функции от първа степен. Освен това

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = \frac{y + \sqrt{y^2-x^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Полагаме $\dfrac{y}{x} = z \Longrightarrow y = xz \Longrightarrow y' = z + xz'$ и като заместим в уравнението получаваме диференциално уравнение с отделени променливи

$$z + xz' = z + \sqrt{z^2-1} \Longrightarrow x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \sqrt{z^2-1} \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-1}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \ln C$$

$$\Longrightarrow \ln|z + \sqrt{z^2-1}\,| = \ln|Cx| \Longrightarrow \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} = Cx$$

$$\Longrightarrow y^2 - x^2 = (Cx^2 - y)^2 \Longrightarrow -x^2 = C^2x^4 - 2Cx^2y \Longrightarrow y = \frac{C^2x^2+1}{2C}.$$

Ако $\sqrt{z^2-1} = 0 \Longrightarrow z = \pm 1 \Longrightarrow y = \pm x$. Тези две прави (ъглополвящи на първи и трети, втори и четвърти квадрант) са решения, които сме загубили, защото те не се получават при никое C от общия интеграл. Следователно те са особени решения.

Пример 2.5. Решете уравнението $xy\mathrm{d}y - y^2\mathrm{d}x = (x+y)^2e^{-\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$.

Решение. От уравнението следва, че $x \neq 0$. Написваме уравнението във вида $[(x+y)^2e^{-\frac{y}{x}} + y^2]\mathrm{d}x = xy\mathrm{d}y$ и тогава коефициентите пред $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$ са хомогенни функции от втора степен. Освен това

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = \frac{(x+y)^2e^{-\frac{y}{x}} + y^2}{xy} = (\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x})e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

С непосредствена проверка установяваме, че $y = 0$ не е решение на уравнението. Полагаме $\dfrac{y}{x} = z \Longrightarrow y = xz \Longrightarrow y' = z + xz'$ и като заместим в уравнението получаваме диференциално уравнение с отделени променливи

$$z + xz' = \Big(\frac{1}{z} + 2 + z\Big)e^{-z} + z \Longrightarrow xz' = \frac{(z^2+2z+1)e^{-z}}{z}$$

$$\Longrightarrow x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{(z+1)^2e^{-z}}{z} \Longrightarrow \int \frac{ze^z\mathrm{d}z}{(z+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \ln C.$$

$$I_1 = \int \frac{ze^z\mathrm{d}z}{(z+1)^2} = \int \frac{(z+1)e^z - e^z}{(z+1)^2}\mathrm{d}z = \int \frac{e^z\mathrm{d}z}{z+1} - \int \frac{e^z\mathrm{d}z}{(z+1)^2}$$

$$= \int \frac{e^z\mathrm{d}z}{z+1} + \int e^z\mathrm{d}\Big(\frac{1}{z+1}\Big) = \int \frac{e^z\mathrm{d}z}{z+1} + \frac{e^z}{z+1} - \int \frac{e^z\mathrm{d}z}{z+1} = \frac{e^z}{z+1}.$$

Тогава от $\dfrac{e^z}{z+1} = \ln|Cx| \Longrightarrow \dfrac{xe^{\frac{y}{x}}}{x+y} = \ln|Cx|$.

Пример 2.6. Намерете уравнението на фамилията криви, тангентата на които в произволна точка $M(x,y)$ сключва с оста Ox два пъти по-голям ъгъл от този, който сключва $\vec{r}_M$ с оста Ox.

Решение. От правоъгълния ΔOM_1M имаме $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$ и тогава $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$. Ъгловият коефициент на тангентата t е $y' = \mathrm{tg}\theta$.

Следователно

$$y' = \mathrm{tg}\theta = \mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{2\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\frac{y}{x})}{1-[\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\frac{y}{x})]^2} = \frac{2\frac{y}{x}}{1-(\frac{y}{x})^2} = \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

В така полученото хомогенно диференциално уравненеи полагаме $\dfrac{y}{x} = z \Longrightarrow y = xz \Longrightarrow y' = z + xz'$ и заместваме:

$$z + xz' = \frac{2z}{1-z^2} \Longrightarrow x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{z(z^2+1)}{1-z^2} \Longrightarrow \int\frac{(1-z^2)\mathrm{d}z}{z(z^2+1)} = \int\frac{\mathrm{d}x}{x} + \ln\frac{1}{C}.$$

От $\dfrac{1-z^2}{z(z^2+1)} = \dfrac{A}{z} + \dfrac{Bz+C}{z^2+1} \Longrightarrow 1 - z^2 = A(z^2+1) + z(Bz+C)$ и като положим $z = 0$ и $z = i$ за константите получаваме $A = 1, B = -2, C = 0$,

$$\Longrightarrow I_1 = \int\frac{\mathrm{d}z}{z} - 2\int\frac{z\mathrm{d}z}{z^2+1} = \ln|z| - \ln(z^2+1) = \ln\Big|\frac{z}{z^2+1}\Big|.$$

Тогава от $\ln\Big|\dfrac{z}{z^2+1}\Big| = \ln|\dfrac{x}{C}| \Longrightarrow \dfrac{\frac{y}{x}}{(\frac{y}{x})^2+1} = \dfrac{x}{C}$. Следователно търсеното уравнение на *фамилията криви е* $x^2 + y^2 = Cy$ (*фамилия окръжности* с центрове върху Oy, минаващи през точката O.)

Пример 2.7. Намерете крива, която пресича под постоянен ъгъл $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ всички прави на снопа с уравнение $y - \lambda x = 0$.

Решение. Диференциалното уравнение на търсената крива (c) намираме като диференцираме уравнението на снопа, от $y' - \lambda = 0$ и $y - \lambda x = 0$ намираме $y' = \dfrac{y}{x} = f(x,y)$ и заместваме в (2.5) от точка 1., като $x = \xi$, $y = \eta$:

$$\eta' = \frac{\mathrm{tg}45^\circ + \frac{\eta}{\xi}}{1-\frac{\eta}{\xi}\mathrm{tg}45^\circ} = \frac{1+\frac{\eta}{\xi}}{1-\frac{\eta}{\xi}} = \varphi\Big(\frac{\eta}{\xi}\Big). \tag{2.9}$$

Полученото хомогенно диференциално уравнение относно η решаваме като положим $\dfrac{\eta}{\xi} = z \Longrightarrow \eta = z\xi \Longrightarrow \eta' = z + \xi z'$ и заместим в (2.9). Получаваме диференциално уравнение с отделени променливи относно z и последователно:

$$\frac{1}{\xi}+\frac{(z-1)z'}{1+z^2}=0 \Longleftrightarrow \int\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}+\int\frac{(z-1)}{1+z^2}\mathrm{d}z=\ln a, \qquad a=\text{const.},$$

$$\ln|\xi|+\frac{1}{2}\ln(1+z^2)-\mathrm{arctg}z=\ln a, z=\frac{\eta}{\xi},$$

$$\ln\frac{|\xi|\sqrt{1+z^2}}{a}=\mathrm{arctg}z \Longleftrightarrow \ln\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{a}=\mathrm{arctg}\frac{\eta}{\xi},$$

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2}=ae^{\mathrm{arctg}\frac{\eta}{\xi}} \Longrightarrow \rho=ae^{\theta}(\xi=\rho\cos\theta,\eta=\rho\sin\theta).$$

И така, *изогоналните траектории* на фамилията прави с уравнение $y-\lambda x=0$ образуват семейство *логаритмични спирали* с полярно уравнение $\rho=ae^{\theta}$, $a=\text{const}$.

Пример 2.8. Решете уравнението $xy'=y\cos\left(\ln\frac{y}{x}\right)$.

Решение. Написваме уравнението във вида $y'=\frac{y}{x}\cos\left(\ln\frac{y}{x}\right)$. Полагаме $\frac{y}{x}=z \Longrightarrow y=xz \Longrightarrow y'=z+xz'$, заместваме в уравнението и получаваме диференциално уравнение с отделени променливи:

$$z+xz'=z\cos(\ln z) \Longrightarrow xz'=z[\cos(\ln z)-1]$$

$$x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=z[\cos(\ln z)-1] \Longrightarrow \int\frac{\mathrm{d}z}{z[\cos(\ln z)-1]}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\ln C \Longrightarrow I_1=\ln(Cx).$$

$$I_1=\int\frac{\mathrm{d}(lnz)}{\cos(lnz)-1}=\int\frac{\mathrm{d}u}{\cos u-1}, \quad \text{където } \ln z=u.$$

$$I_1=-\int\frac{\mathrm{d}u}{1-\cos u}=-\int\frac{\mathrm{d}u}{2\sin^2\frac{u}{2}}=-\int\frac{\mathrm{d}\frac{u}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}=\mathrm{cotg}\frac{u}{2}=\mathrm{cotg}\frac{\ln\frac{y}{x}}{2}.$$

И така, $\ln(Cx)=\mathrm{cotg}\frac{\ln\frac{y}{x}}{2} \Longleftrightarrow Cx=e^{\mathrm{cotg}\frac{\ln\frac{y}{x}}{2}}$ е *общият интеграл* на даденото хомогенно диференциално уравнение.

Пример 2.9. Решете уравнението $(x+y-2)\mathrm{d}x+(x-y+4)\mathrm{d}y=0$.

Решение.Написваме уравнението във вида $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=-\frac{x+y-2}{x-y+4}$.

От $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0 \Longrightarrow$ правите $g_1: x+y-2=0$ и $g_2: x-y+4=0$ се пресичат в точка (α,β).

Извършваме транслация на координатната система посредством формулите $x=\xi+\alpha, y=\eta+\beta$ (новата координатна система има начало точката

(α, β). Числата α и β намираме от системата (вж.(2.8)).

$$\left| \begin{array}{l} \alpha+\beta-2=0 \\ \alpha-\beta+4=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha=-1 \\ \beta=3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x=\xi-1 \\ y=\eta+3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \mathrm{d}x=\mathrm{d}\xi \\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}\eta \end{array} \right. .$$

Като заместим в уравнението, получаваме хомогенно диференциално уравнение, т.е.:

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\eta'=-\frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}=-\frac{\frac{\eta}{\xi}+1}{1-\frac{\eta}{\xi}}.$$

Полагаме $\dfrac{\eta}{\xi}=z \Rightarrow \eta=\xi z \Rightarrow \eta'=z+\xi z'$ и като заместим, получаваме диференциално уравнение с отделени поменливи

$$z+\xi z'=-\frac{z+1}{1-z} \Longrightarrow \xi\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}=-\frac{z+1}{1-z}-z \Longrightarrow \int\frac{(1-z)\mathrm{d}z}{z^2-2z-1}=\int\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}+\ln C_1$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(z^2-2z-1)}{z^2-2z-1}=\ln|C_1\xi| \Longrightarrow -\frac{1}{2}\ln|z^2-2z-1|=\ln|C_1\xi|$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{z^2-2z-1}}=C_1\xi.$$

Заместваме $z=\dfrac{\eta}{\xi}$, $\xi=x+1$, $\eta=y-3$ и получаваме *общия интеграл* на уравнението

$$\frac{\xi}{\sqrt{\eta^2-2\xi\eta-\xi^2}}=C_1\xi \Longleftrightarrow \eta^2-2\xi\eta-\xi^2=\frac{1}{C_1^2}=C_2$$

$$\Longleftrightarrow (y-3)^2-2(x+1)(y-3)-(x+1)^2=C_2$$

$$\Longleftrightarrow y^2-x^2-2xy+4x-8y=C_2-14$$

$$\Longleftrightarrow y^2-x^2-2xy+4x+8y=C (C=C_2-14).$$

Пример 2.10. Решете уравнението $(x+y+1)\mathrm{d}x+(2x+2y-1)\mathrm{d}y=0$.

Решение. Написваме уравнението във вида

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=-\frac{x+y+1}{2x+2y-1}=-\frac{x+y+1}{2(x+y)-1}.$$

От $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0$, $c_1\neq c_2 \Longrightarrow$ правите $g_1: x+y+1=0$ и $g_2: 2x+2y-1=0$ са успоредни.

(α, β). Числата α и β намираме от системата (вж.(2.8)).

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta-2=0 \\ \alpha-\beta+4=0 \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} \alpha=-1 \\ \beta=3 \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x=\xi-1 \\ y=\eta+3 \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} \mathrm{d}x=\mathrm{d}\xi \\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}\eta \end{vmatrix}.$$

Като заместим в уравнението, получаваме хомогенно диференциално уравнение, т.е.:

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\eta'=-\frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}=-\frac{\frac{\eta}{\xi}+1}{1-\frac{\eta}{\xi}}.$$

Полагаме $\frac{\eta}{\xi}=z \Rightarrow \eta=\xi z \Rightarrow \eta'=z+\xi z'$ и като заместим, получаваме диференциално уравнение с отделени поменливи

$$z+\xi z'=-\frac{z+1}{1-z} \Longrightarrow \xi\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}=-\frac{z+1}{1-z}-z \Longrightarrow \int\frac{(1-z)\mathrm{d}z}{z^2-2z-1}=\int\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}+\ln C_1$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(z^2-2z-1)}{z^2-2z-1}=\ln|C_1\xi| \Longrightarrow -\frac{1}{2}\ln|z^2-2z-1|=\ln|C_1\xi|$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{z^2-2z-1}}=C_1\xi.$$

Заместваме $z=\frac{\eta}{\xi}$, $\xi=x+1$, $\eta=y-3$ и получаваме *общия интеграл* на уравнението

$$\frac{\xi}{\sqrt{\eta^2-2\xi\eta-\xi^2}}=C_1\xi \Longleftrightarrow \eta^2-2\xi\eta-\xi^2=\frac{1}{C_1^2}=C_2$$

$$\Longleftrightarrow (y-3)^2-2(x+1)(y-3)-(x+1)^2=C_2$$

$$\Longleftrightarrow y^2-x^2-2xy+4x-8y=C_2-14$$

$$\Longleftrightarrow y^2-x^2-2xy+4x+8y=C(C=C_2-14).$$

Пример 2.10. Решете уравнението $(x+y+1)\mathrm{d}x+(2x+2y-1)\mathrm{d}y=0$.

Решение. Написваме уравнението във вида

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=-\frac{x+y+1}{2x+2y-1}=-\frac{x+y+1}{2(x+y)-1}.$$

От $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0$, $c_1\neq c_2 \Longrightarrow$ правите $g_1: x+y+1=0$ и $g_2: 2x+2y-1=0$ са успоредни.

(α, β). Числата α и β намираме от системата (вж.(2.8)).

$$\left| \begin{array}{l} \alpha+\beta-2=0 \\ \alpha-\beta+4=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha=-1 \\ \beta=3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x=\xi-1 \\ y=\eta+3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \mathrm{d}x=\mathrm{d}\xi \\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}\eta \end{array} \right. .$$

Като заместим в уравнението, получаваме хомогенно диференциално уравнение, т.е.:

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\eta'=-\frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}=-\frac{\frac{\eta}{\xi}+1}{1-\frac{\eta}{\xi}}.$$

Полагаме $\dfrac{\eta}{\xi}=z \Rightarrow \eta=\xi z \Rightarrow \eta'=z+\xi z'$ и като заместим, получаваме диференциално уравнение с отделени поменливи

$$z+\xi z'=-\frac{z+1}{1-z} \Longrightarrow \xi\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}=-\frac{z+1}{1-z}-z \Longrightarrow \int\frac{(1-z)\mathrm{d}z}{z^2-2z-1}=\int\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}+\ln C_1$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(z^2-2z-1)}{z^2-2z-1}=\ln|C_1\xi| \Longrightarrow -\frac{1}{2}\ln|z^2-2z-1|=\ln|C_1\xi|$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{z^2-2z-1}}=C_1\xi.$$

Заместваме $z=\dfrac{\eta}{\xi}$, $\xi=x+1$, $\eta=y-3$ и получаваме *общия интеграл* на уравнението

$$\frac{\xi}{\sqrt{\eta^2-2\xi\eta-\xi^2}}=C_1\xi \Longleftrightarrow \eta^2-2\xi\eta-\xi^2=\frac{1}{C_1^2}=C_2$$

$$\Longleftrightarrow (y-3)^2-2(x+1)(y-3)-(x+1)^2=C_2$$

$$\Longleftrightarrow y^2-x^2-2xy+4x-8y=C_2-14$$

$$\Longleftrightarrow y^2-x^2-2xy+4x+8y=C(C=C_2-14).$$

Пример 2.10. Решете уравнението $(x+y+1)\mathrm{d}x+(2x+2y-1)\mathrm{d}y=0$.

Решение. Написваме уравнението във вида

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=-\frac{x+y+1}{2x+2y-1}=-\frac{x+y+1}{2(x+y)-1}.$$

От $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0$, $c_1\neq c_2 \Longrightarrow$ правите $g_1: x+y+1=0$ и $g_2: 2x+2y-1=0$ са успоредни.

Полагаме $x+y=z \Longrightarrow 1+y'=z' \Longrightarrow y'=z'-1$ и като заместим в уравнението получаваме диференциално уравнение с отделени променливи

$$z'-1=-\frac{z+1}{2z-1} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{z-2}{2z-1} \Longrightarrow \int \frac{2z-1}{z-2}\mathrm{d}z=\int \mathrm{d}x+C_1$$
$$\Longrightarrow \int \frac{2(z-2)+3}{z-2}\mathrm{d}z=x+C_1 \Longrightarrow 2\int \mathrm{d}z+3\int \frac{\mathrm{d}z}{z-2}=x+C_1$$
$$\Longrightarrow 2z+3\ln|z-2|=x+C_1 \Longrightarrow \ln(x+y-2)^3=x-2(x+y)+C_1$$
$$\Longrightarrow \ln(x+y-2)^3=C_1-x-2y \Longrightarrow (x+y-2)^3=e^{C_1}e^{-(x+2y)}$$
$$\Longrightarrow (x+y-2)^3e^{x+2y}=C, \quad (C=e^{C_1}).$$

ЗАДАЧИ

I. Намерете *решенията* на диференциалните уравнение с *отделени променливи*:

1. $(xy^2+x)\mathrm{d}x+(y-x^2y)\mathrm{d}y=0$ — Отг. $y^2+1=C(1-x^2)$
2. $xyy'=1-x^2$ — Отг. $x^2+y^2=\ln Cx^2$
3. $yy'=\dfrac{1-2x}{y}, y\neq 0$ — Отг. $y^3=3x-3x^2+C$
4. $y'\mathrm{tg}x-y=a, a=\mathrm{const.}$ — Отг. $y+a=C\sin x$
5. $xy'+y=y^2$ — Отг. $xy=C(y-1)$
6. $y'+\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}=0$ — Отг. $y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-y^2}=C$; $y=\pm1$-особени решения
7. $\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x+y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y=0$ — Отг. $\sqrt{1-y^2}=\arcsin x+C$; $x=\pm1, y=\pm1$-особени решения
8. $y'+\sin\dfrac{x+y}{2}=\sin\dfrac{x-y}{2}$ — Отг. $\ln|\mathrm{tg}\dfrac{y}{4}|+2\sin\dfrac{x}{2}=C$
9. $e^{-y}(1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=1$ — Отг. $e^y=1+Ce^x$
10. $y^2y'+x^2=1$ — Отг. $x^3+y^3-3x=C$
11. $(x+y)y'+xy=0$ — Отг. $y=Ce^{-x}(x+1)$
12. $y'\sqrt{1-x^2}=1+y^2$ — Отг. $\mathrm{arctg}y-\arcsin x=C$
13. $y'+\dfrac{x\sin x}{y\cos y}=0$ — Отг. $y\sin y+\cos x-x\cos x+\sin x=C$
14. $(1+y^2)x\mathrm{d}x+(1+x^2)\mathrm{d}y=0$ — Отг. $\ln\sqrt{1+x^2}+\mathrm{arctg}y=C$
15. $xy\mathrm{d}x+\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y=0$ — Отг. $y=e^{C\sqrt{1-x^2}}$; $x=\pm1$-особени решения; $y=0$-особено решение
16. $ye^{2x}\mathrm{d}x-(1+e^{2x})\mathrm{d}y=0$ — Отг. $y=C\sqrt{1+e^{2x}}$.

II Решете диференциалните уравнения с *отделени променливи* при дадени *начални условия*:

1. $y' \sin x = y \ln y, M(\frac{\pi}{2}, e)$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \\ y = e\text{-особено решение} \end{array} \right.$
2. $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}, M(0,1)$ Отг. $y = \dfrac{x+1}{1-x}$
3. $\sin y \cos x \mathrm{d}y = \cos y \sin x \mathrm{d}x, M(0, \frac{\pi}{4})$ Отг. $\cos x = \sqrt{2} \cos y$
4. $y - xy' = b(1 + x^2 y'), M(1,1)$ Отг. $y = \dfrac{x+b}{bx+1}$

III Решете диференциалните уравнения, като ги сведете до такива с отделени променливи чрез походяща субституция:

1. $y' = \cos(x+y)$ Отг. $\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2} - x = C$
2. $y' = \dfrac{1}{2x+y}$ Отг. $4x + 2y + 1 = Ce^{2y}$
3. $y' = (4x+y+1)^2$ Отг. $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{4x+y+1}{2} - x = C$

IV Решете *хомогенните* диференциални уравнения:

1. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$ Отг. $x^3(x+y) = C(y-2x)$
2. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ Отг. $\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$
3. $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = y\mathrm{d}y$ Отг. $ye^{\frac{x}{y}} = C$
4. $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y^2 + x^2 = Cx \\ y = 0\text{-особено решение} \end{array} \right.$
5. $xyy' = x^2 + y^2$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = \pm x\sqrt{\ln(Cx^2)} \\ x = 0\text{-особено решение} \end{array} \right.$
6. $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$ Отг. $x^2 = C^2 + 2Cy$
7. $y^2 + x^2 y' = xyy'$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = Ce^{\frac{y}{x}} \\ y = 0 \text{ - особено решение} \end{array} \right.$
8. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0$ Отг. $\ln|x| + e^{-\frac{y}{x}} = C$
9. $xy' = y \ln \dfrac{y}{x}$ Отг. $Cx = 1 - \ln\dfrac{y}{x}$
10. $(3y^2 + 3xy + x^2)\mathrm{d}x = (x^2 + 2xy)\mathrm{d}y$ Отг. $(x+y)^2 = Cx^3 e^{-\frac{x}{x+y}}$
11. $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = 2x(\operatorname{arctg} Cx + k\pi) \\ y = 0\text{-особено решение} \end{array} \right.$
12. $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2-y^2} + xy + y^2$ Отг. $\left| \begin{array}{l} \arcsin\dfrac{y}{x} - \dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{x} - \ln|x| = C \\ y = x\text{-особено решение} \end{array} \right.$

13. $(x^2+y^2)\mathrm{d}y - 2xy\mathrm{d}x = 0$ Отг. $y^2 - x^2 = Cy$

14. $y' = \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2}, \quad x \neq 0$ Отг. $x = Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$

15. $\dfrac{xy'-y}{x} = \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0$ Отг. $y = x\arcsin Cx$

16. $(x - y\cos\dfrac{y}{x})\mathrm{d}x + x\cos\dfrac{y}{x}\mathrm{d}y = 0$ Отг. $\sin\dfrac{y}{x} + \ln|x| = C$

17. $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-xy+y^2} = \dfrac{\mathrm{d}y}{2y^2-xy}$ Отг. $y(y-2x)^3 = C(y-x)^2$

V Решете *хомогенните* диференциални уравнения при дадени *начални условия*:

1. $(xy'-y)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = x, \quad y(1)=0$ Отг. $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$
2. $(y^2-3x^2)\mathrm{d}y + 2xy\mathrm{d}x = 0, \quad y(0)=1$ Отг. $y^3 - y^2 + x^2 = 0$
3. $y + \sqrt{x^2+y^2} - xy' = 0, \quad y(1) = 0$ Отг. $y = \dfrac{x^2-1}{2}$
4. $xy' = y(1+\ln\frac{y}{x}), \quad y(1) = e^{-\frac{1}{2}}$ Отг. $y = xe^{-\frac{x}{2}}$

VI Решете *обикновените обобщени хомогенни* диференциални уравнения :

1. $y' = \dfrac{2y-x-5}{2x-y+4}$ Отг. $(x+y-1)^3 = C(y-x-3)$
2. $y' = \dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$ Отг. $x^2+y^2-xy+x-y = C$
3. $y' = \dfrac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$ Отг. $\ln|y+2| + 2\operatorname{arctg}\dfrac{y+2}{x-3} = C$
4. $(x+y+1)\mathrm{d}x = (2x+2y-1)\mathrm{d}y$ Отг. $2y - x - \ln|x+y| = C.$

ГЛАВА 3

ЛИНЕЙНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ПЪРВИ РЕД И ПРИВОДИМИ КЪМ ТЯХ

А. Линейно диференциално уравнение от първи ред

Дефиниция 1 *Уравнение от вида:*

$$y' = X_1(x)y + X_2(x), \tag{3.1}$$

където $X_1(x)$ *и* $X_2(x)$ *са непрекъснати функции на* $x \in (a, b) \subset (-\infty, +\infty)$ *се нарича* ***линейно диференциално уравнение от първи ред относно*** y.

Ако $X_2(x) \neq 0$ уравнението се нарича *линейно нехомогенно*. Ако умножим (3.1) с $e^{-\int X_1(x)\mathrm{d}x}$ получаваме

$$y'e^{-\int X_1(x)\mathrm{d}x} - X_1(x)ye^{-\int X_1(x)\mathrm{d}x} = X_2(x)e^{-\int X_1(x)\mathrm{d}x}$$

$$\left(ye^{-\int X_1(x)\mathrm{d}x}\right)' = X_2(x)e^{-\int X_1(x)\mathrm{d}x}$$

$$\int \left(ye^{-\int X_1(x)\mathrm{d}x}\right)'\mathrm{d}x = \int X_2(x)e^{-\int X_1(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$ye^{-\int X_1(x)\mathrm{d}x} = C + \int X_2(x)e^{-\int X_1(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$y = e^{\int X_1(x)\mathrm{d}x}(C + \int X_2(x)e^{-\int X_1(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x). \tag{3.2}$$

Формула (3.2) изчерпва всички решения на (3.1), т.е. (3.2) е общият интеграл на (3.1).

Ако $X_2(x) = 0$ уравнението (3.1) се нарича *линейно хомогенно*, а общият му интеграл е

$$y = Ce^{\int X_1(x)\mathrm{d}x}. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.1) може да бъде написано във вида

$$y + A_0(x)y = f(x) \tag{3.1'}$$

и тогава общият му интеграл е

$$y = e^{-\int A_0(x)\mathrm{d}x}\left(C + \int f(x)e^{\int A_0(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right). \tag{3.2'}$$

Ако уравнението (3.1) не е линейно относно у, проверяваме дали не е *линейно относно* x, т.е. (3.1) има вида: $x' = Y_1(y)x + Y_2(y)$. Тогава общият интеграл е

$$x = e^{\int Y_1(y)\mathrm{d}y}\Big(C + \int Y_2(y)e^{-\int Y_1(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\Big). \tag{3.4}$$

Б. Диференциално уравнение на Бернули

Дефиниция 2 *Уравнение от вида*

$$y' = X_1(x)y + X_2(x)y^n, \quad n \neq 0; 1, \quad n \in R, \tag{3.5}$$

където $X_1(x)$ *и* $X_2(x)$ *са непрекъснати функции на* $x \in (a, b) \subset (-\infty, +\infty)$*, се нарича* ***уравнение на Бернули относно*** $\boldsymbol{y}$.

Като умножим (3.5) с y^{-n} и полжим $y^{1-n} = z$ получаваме линейното уравнение $z' = (1-n)X_1(x)z + (1-n)X_2(x)$ и ако неговото общо решение означим със $z = \varphi(x, C)$, то общият интеграл на (3.5) е

$$y = [\varphi(x, C)]^{\frac{1}{1-n}} = \psi(x, C). \tag{3.6}$$

Ако $n = 0$ или $n = 1$ уравнение (3.5) е линейно. При $n > 0$ решението $y(x) = 0$ (абсцисната ос) на (3.5) се губи, поради умножението с y^{-n} (деление с y^n) и затова се проверява дали $y = 0$ не е особено решение.

Уравнението (3.5) може да е *Бернулиево* относно x, т.е. (3.5) има вида

$$x' = Y_1(y)x + Y_2(y)y^n, \quad n \neq 0; 1, \quad n \in R. \tag{3.7}$$

В. Диференциално уравнение на Рикати

Дефиниция 3 *Уравнение от вида*

$$y' = X_0(x) + X_1(x)y + X_2(x)y^2, \tag{3.8}$$

където $X_0(x), X_1(x)$ *и* $X_2(x)$ *са непрекъснати функции на* $x \in (a, b) \subset (-\infty, +\infty)$*, се нарича* ***уравнение на Рикати***.

Уравнението (3.8) е решимо, ако познаваме едно негово частно решение (частен интеграл) $y_1(x)$. Предполагаме, че в интервала (a, b) коефициентите $X_0(x) \neq 0$ и $X_2(x) \neq 0$, защото в противен случай (3.8) се превръща съответно във вида (3.5) и (3.1).

Като положим $y = y_1(x) + \frac{1}{z} \Longrightarrow y' = y_1'(x) - \frac{1}{z^2}z'$ и заместим в (3.8) получаваме линейното уравнение $z' = (-X_1(x) - 2X_2(x)y_1(x))z - X_2(x)$ и ако неговото общо решение означим $z = Cf(x) + g(x)$, то общият интеграл на (3.8) е

$$y = y_1(x) + \frac{1}{Cf(x) + g(x)} = \frac{y_1(x)(Cf(x) + g(x)) + 1}{Cf(x) + g(x)} = \frac{\psi(x, C)}{\varphi(x, C)}. \tag{3.9}$$

Забележка. Решението на уравнението на Рикати е винаги дробно-линейна функция относно константата C.

Пример 3.1. Решете уравнението $y'\sin x - y\cos x - \sin^2 x = 0$.

Решение. Като разделим двете страни на уравнението на $\sin x \neq 0$, $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, получаваме *линейно диференциално уравнение от първи ред относно* y, като $X_1(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ и $X_2(x) = \sin x$:

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x} y + \sin x$$

$$y = e^{\int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x}\left[C + \int \sin x e^{-\int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x} \mathrm{d}x\right]$$

$$y = e^{\int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x}}\left[C + \int \sin x e^{-\int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x}} \mathrm{d}x\right]$$

$$y = e^{\ln|\sin x|}\left[C + \int \sin x e^{\ln|\sin x|^{-1}} \mathrm{d}x\right] \Longrightarrow y = \sin x(C + x) \text{ – общ интеграл.}$$

Пример 3.2. Решете уравнението $1 + y^2 + (x - \mathrm{arctg} y)y' = 0$.

Решение: Уравнението не е линейно относно y. За да проверим дали не е *линейно относно* x, ще умножим двете му страни с $x' = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, като

$$Y_1(y) = -\frac{1}{1+y^2}, \quad Y_2(y) = \frac{\mathrm{arctg} y}{1+y^2}:$$

$$x' = -\frac{1}{1+y^2}x + \frac{\mathrm{arctg} y}{1+y^2}$$

$$x = e^{-\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}}\left[C + \int \frac{\mathrm{arctg} y}{1+y^2} e^{\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}} \mathrm{d}y\right]$$

$$x = e^{-\mathrm{arctg} y}\left[C + \int \frac{\mathrm{arctg} y}{1+y^2} e^{\mathrm{arctg} y}\mathrm{d}y\right]$$

$$x = e^{-\mathrm{arctg} y}\left[C + \int \mathrm{arctg} y \mathrm{d} e^{\mathrm{arctg} y}\right]$$

$$x = e^{-\mathrm{arctg} y}\left[C + \mathrm{arctg} y e^{\mathrm{arctg} y} - \int e^{\mathrm{arctg} y}\mathrm{d}\,\mathrm{arctg} y\right]$$

$$x = e^{-\mathrm{arctg} y}\left[C + \mathrm{arctg} y e^{\mathrm{arctg} y} - e^{\mathrm{arctg} y}\right]$$

$$\Longrightarrow x = Ce^{-\mathrm{arctg} y} + \mathrm{arctg} y - 1 \quad \text{(общ интеграл).}$$

Пример 3.3. Намерете интегрална крива на диференциалното уравнение $y' = \dfrac{y}{1-x^2} + 1 + x, x \neq \pm 1$, която минава през точката $M(0,1)$.

Решение. Уравнението е *линейно от първи ред относно* y,

$$y = e^{\int \frac{dx}{1-x^2}} \left[C + \int (1+x) e^{-\int \frac{dx}{1-x^2}} dx \right],$$

От

$$\exp\left(\frac{1}{2}\int \frac{(1+x)+(1-x)}{(1+x)(1-x)}dx\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x}\right)$$
$$= \exp\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) = \exp\left(\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$
$$\Longrightarrow y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left[C + \int (1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx\right] = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left[C + \int \sqrt{1-x^2}\,dx\right].$$

Полагаме $x = \sin t \Longrightarrow dx = \cos t dt \Longrightarrow t = \arcsin x$

$$\Longrightarrow y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left[C + \int \cos^2 t dt\right] = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left[C + \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt\right]$$
$$= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left[C + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right] = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left[C + \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\sin t\cos t\right]$$
$$= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left[C + \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right] \text{ - общ интеграл.}$$

От $y(0) = 1 \Longrightarrow 1 = C$. Тогава търсената интегрална крива има уравнение

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left[1 + \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\right].$$

Пример 3.4. Решете уравнението $y'x + y - ay^2 x \ln x = 0, \quad x > 0.$

*Решение.*Като разделим уравнението на $x \neq 0$ получаваме *Бернулиево диференциално уравнение относно* y:

$$y' = -\frac{1}{x}y + ay^2 \ln x\,.$$

Умножаваме уравнението с y^{-2} и като положим $y^{-1} = z \Longrightarrow -y^{-2}y' = z' \Longrightarrow y^{-2}y' = -z'$ получаваме линейно диференциално уравнение от първи ред относно z:

$$y^{-2}y' = -\frac{1}{x}y^{-1} + a\ln x \Longleftrightarrow z' = \frac{1}{x}z - a\ln x$$

$$z = e^{\int\frac{\mathrm{d}x}{x}}\Big[C - a\int \ln x e^{-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\mathrm{d}x}\Big] = e^{\ln x}\Big[C - a\int \ln x e^{\ln x^{-1}}\mathrm{d}x\Big] = x\Big[C - a\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x\Big]$$

$$\frac{1}{y} = x\Big[C - a\int \ln x \mathrm{d}\ln x\Big] = x\Big[C - \frac{a\ln^2 x}{2}\Big]$$

$$\Longrightarrow y = \frac{2}{x(2C - a\ln^2 x)} \quad \text{(общ интеграл).}$$

Особеното решение е $y = 0$.

Пример 3.5. Решете уравнението $y'(x^2y^3 + xy) = 1$.

Решение. Уравнението не е линейно, нито Бернулиево относно y. Като умножим уравнението с $x' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ установяваме, че е *Бернулиево относно* x:

$$x' = yx + y^3x^2.$$

Умножаваме последното уравнение с $x^{-2} \neq 0$ и като положим $x^{-1} = z \Longrightarrow -x^{-2}x' = z' \Longrightarrow x^{-2}x' = -z'$ получаваме диференциално уравнение от първи ред относно z:

$$x^{-2}x' = yx^{-1} + y^3 \Longleftrightarrow z' = -yz - y^3$$

$$z = e^{-\int y\mathrm{d}y}\Big[C - \int y^3 e^{\int y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\Big] = e^{-\frac{y^2}{2}}\Big[C - \int y^3 e^{\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y\Big] = e^{-\frac{y^2}{2}}\Big[C - \int y^2 \mathrm{d}e^{\frac{y^2}{2}}\Big]$$

$$= e^{-\frac{y^2}{2}}\Big[C - y^2e^{\frac{y^2}{2}} + 2\int y e^{\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y\Big] = e^{-\frac{y^2}{2}}\Big[C - y^2e^{\frac{y^2}{2}} + 2\int e^{\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}(\frac{y^2}{2})\Big]$$

$$\frac{1}{x} = e^{-\frac{y^2}{2}}[C - y^2e^{\frac{y^2}{2}} + 2e^{\frac{y^2}{2}}] = Ce^{-\frac{y^2}{2}} - y^2 + 2$$

$$\Longrightarrow x = \frac{1}{Ce^{-\frac{y^2}{2}} - y^2 + 2} \quad \text{(общ интеграл).}$$

Пример 3.6. Решете уравнението $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

Решение. От $y' = \dfrac{4y}{x} + 2xy^{\frac{1}{2}}$ (Бернулиево диференциално уравнение относно y, $x \neq 0$), като умножим двете страни с $y^{-\frac{1}{2}}$, получаваме

$$y^{-\frac{1}{2}}y' = \frac{4}{x}y^{\frac{1}{2}} + 2x.$$

Полагаме $y^{\frac{1}{2}} = z$ и като диференцираме по x, получаваме $\dfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' = z'$ или $y^{-\frac{1}{2}}y' = 2z'$. Тогава

$$2z' = \frac{4}{x}z + 2x \Longleftrightarrow z' = \frac{2}{x}z + x.$$

Полученото уравнение е линейно относно z и

$$z = e^{2\int\frac{dx}{x}}\left[C + \int xe^{-2\int\frac{dx}{x}}dx\right] = e^{\ln|x|^2}\left[C + \int xe^{\ln|x|^{-2}}dx\right] = x^2\left[C + \int x\frac{1}{x^2}dx\right]$$

$$\sqrt{y} = x^2[C + \ln|x|] \Longrightarrow y = x^4[C + \ln|x|]^2 \quad \text{(общ интеграл).}$$

Решението $y = 0$ е особено.

Пример 3.7. Решете уравнението $xy' + y = y^2$, ако $y(1) = \dfrac{1}{2}$.

Решение. От $y' = -\dfrac{1}{x}y + \dfrac{1}{x}y^2$ установяваме, че уравнението е Бернулиево относно y. Умножаваме го с y^{-2}, полагаме $y^{-1} = z \Longrightarrow -y^{-2}y' = z' \Longrightarrow y^{-2}y' = -z'$ и като заместим в уравнението получаваме линейно диференциално уравнение относно z:

$$y^{-2}y' = -\frac{1}{x}y^{-1} + \frac{1}{x} \Longleftrightarrow z' = \frac{1}{x}z - \frac{1}{x}$$

$$z = e^{\int\frac{dx}{x}}\left[C - \int\frac{1}{x}e^{-\int\frac{dx}{x}}dx\right] = e^{\ln|x|}\left[C - \int\frac{1}{x}e^{-\ln|x|}dx\right] = |x|\left[C - \int\frac{1}{x^2}dx\right]$$

$$\sqrt{y} = |x|\left[C + \frac{1}{x}\right], \quad \text{(общ интеграл).}$$

От $y(1) = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} = |1|(C+1) \Longrightarrow C = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1$. И така, $\sqrt{y} = |x|\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$ е интегрална крива, която минава през точката $M(1, \frac{1}{2})$.

Пример 3.8. Намерете частното решение на уравнението

$$3dy + (1 + 3y^3)y\sin x dx = 0,$$

удовлетворяващо началното условие $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Решение. Преобразуваме уравнението до *Бернулиево спрямо* y:

$$y' = -\frac{1}{3}y\sin x - y^4\sin x.$$

Умножаваме полученото уравнение с y^{-4}:

$$y^{-4}y' = -\frac{1}{3}y^{-3}\sin x - \sin x.$$

Полагаме $y^{-3} = z \Rightarrow -3y^{-4}y' = z' \Rightarrow y^{-4}y' = -\frac{z'}{3}$. Заместваме в уравнението и получаваме *линейно* уравнение спрямо z

$$z' = z\sin x + 3\sin x$$

$$z = e^{\int \sin x \mathrm{d}x}\left(C + \int 3\sin x e^{-\int \sin x \mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) = e^{-\cos x}\left(C + 3\int \sin x e^{\cos x}\mathrm{d}x\right)$$

$$= e^{-\cos x}\left(C - 3e^{\cos x}\right) \Longrightarrow z = Ce^{-\cos x} - 3.$$

$$\Longrightarrow y^3 = \frac{1}{Ce^{-\cos x} - 3}.$$

Заместваме началните условия $(x = \frac{\pi}{2}, y = 1)$:

$$1 = \frac{1}{C-3} \Longrightarrow C = 4.$$

Следователно, търсеното частно решение е:

$$y^3 = \frac{1}{4e^{-\cos x} - 3}.$$

Пример 3.9. Намерете интегралната крива през т.$M(\frac{1}{2}, 1)$ за диференциалното уравнение $y\mathrm{d}x + (x - \frac{1}{2}x^3y)\mathrm{d}y = 0$.

Решение. Уравнението не е нито линейно, нито Бернулиево спрямо y. След умножаване с $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ получаваме *Бернулиево уравнение спрямо* x:

$$x' = -\frac{1}{y}x + \frac{1}{2}x^3.$$

Умножаваме уравнението с $x^{-3} \neq 0$ и полагаме $x^{-2} = z \Rightarrow -2x^{-3}x' = z'$. Полученото уравнение е *линейно спрямо* z:

$$z' = \frac{2}{y}z - 1,$$

което има решение $z = Cy^2 + y$. Общото решение на уравнението е:

$$x^2(Cy^2 + y) = 1.$$

След заместване на координатите на точка $M(\frac{1}{2}, 1)$ получаваме уравнение спрямо C: $\frac{1}{4}(C+1) = 0 \Rightarrow C = 3$. Търсеното частно решение е

$$x^2(y + 3y^2) = 1.$$

Пример 3.10. Решете уравнението $y' = x - \frac{1}{x}y + \frac{2}{x^3}y^2, x > 0$, ако допуска частен интеграл $y_1(x) = x^2$.

Решение. Уравнението е *Рикатиево.* Като положим

$$y = x^2 + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = 2x - \frac{z'}{z^2}$$

и заместим в уравнението, получаваме линейно диференциално уравнение от първи ред относно z:

$$2x - \frac{z'}{z^2} = x - \frac{1}{x}(x^2 + \frac{1}{z}) + \frac{2}{x^3}(x^2 + \frac{1}{z})^2$$

$$2x - \frac{z'}{z^2} = x - x - \frac{1}{xz} + 2x + \frac{4}{xz} + \frac{2}{x^3z^2}$$

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{3}{xz} + \frac{2}{x^3z^2} \Longleftrightarrow z' = -\frac{3}{x}z - \frac{2}{x^3}$$

$$z = e^{-3\int\frac{dx}{x}}\left[C - 2\int \frac{1}{x^3}e^{3\int\frac{dx}{x}}\mathrm{d}x\right] = e^{\ln|x|^{-3}}\left[C - 2\int \frac{1}{x^3}e^{\ln|x|^3}\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{x^3}\left[C - 2\int \mathrm{d}x\right] = \frac{C - 2x}{x^3}$$

$$y = x^2 + \frac{x^3}{C - 2x} \Longrightarrow y = \frac{x^2(C - x)}{C - 2x}.$$

Пример 3.11. Решете уравнението $y' = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}y - y^2, \quad x \neq 0$, ако допуска частен интеграл от вида $y = ax^n$.

Решение. Заместваме частния интеграл $y = ax^n, y' = anx^{n-1}$ в уравнението:

$$anx^{n-1} \equiv \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}ax^n - a^2x^{2n} \Rightarrow anx^{n+1} \equiv 1 - ax^{n+1} - a^2x^{2n+2}$$

$$a^2x^{2n+2} + a(n+1)x^{n+1} \equiv 1.$$

Два полинома са тъждествено равни, ако са от една и съща степен. Тогава

$$x^{2n+2} = 1, \quad x^{n+1} = 1 \quad \text{при} \quad n + 1 = 0, \quad n = -1 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1.$$

Получават се два частни интеграла $y = \pm x^{-1}$. Полагаме

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}.$$

След заместване получаваме *линейно* уравнение спрямо z:

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}) - (\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2})$$

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xz} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{xz} - \frac{1}{z^2}$$

$$\Longrightarrow -\frac{z'}{z^2} = -\frac{3}{xz} + \frac{1}{z} \Longrightarrow z' = \frac{3}{x}z + 1.$$

Решението на линейното уравнение е:

$$z = Cx^3 - \frac{x}{2}.$$

Заместваме резултата за z в полагането $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$

$$\Longrightarrow y = \frac{2Cx^2 + 1}{x(2Cx^2 - 1)}.$$

ЗАДАЧИ

I. Решете *линейните* диференциални уравнения:

1. $y' + 2y = 4x$ Отг. $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$
2. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ Отг. $y = e^{-x^2}(C + \frac{x^2}{2})$
3. $y' = \frac{2x-1}{x^2}y + 1$ Отг. $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$
4. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ Отг. $y = (1+x^2)(C+x)$
5. $y' + y = \cos x$ Отг. $y = Ce^{-x} + \frac{\sin x + \cos x}{2}$
6. $y' + ay = e^{mx}, a, m = \text{const}.$ Отг. $y = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{m+a}$
7. $y' = \frac{1}{2x - y^2}$ Отг. $x = Ce^{2y} + \frac{1}{4}(2y^2 + 2y + 1)$
8. $x(y' - y) = e^x(1 + x^2)$ Отг. $y = e^x(C + \ln|x| + \frac{x^2}{2})$
9. $y' - y\cos x = \sin x \cos x$ Отг. $y = Ce^{\sin x} - 1 - \sin x.$

II. Намерете *частните* решения, удовлетворяващи *началните условия* за уравненията:

1. $y' = 2y + e^x - x, \quad y(0) = \frac{1}{4}$ Отг. $y = e^{2x} - e^x + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$
2. $y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}, \quad y(1) = 1$ Отг. $x = \frac{1}{y} + y\ln y$
3. $y' + y\text{tg}x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0$ Отг. $y = \sin x.$

III. Намерете решенията на уравненията на *Бернули*:

1. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$ Отг. $y = e^{-2x^2}(C + \frac{x^2}{2})^2; y = 0$
2. $\mathrm{d}y = (y^2 e^x - y)\mathrm{d}x$ Отг. $y = \frac{e^{-x}}{C - x}; y = 0$

3. $y' = y\text{cotg}x + \dfrac{y^3}{\sin x}$ Отг. $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{C + 2\cos x}}; y = 0$

4. $y' = y(y^3 \cos x + \text{tg}x)$ Отг. $y = \dfrac{1}{\cos x \sqrt[3]{C - 3\text{tg}x}}; y = 0$

5. $y' = \dfrac{2x}{x^2 \cos y + \sin 2y}$ Отг. $x^2 = Ce^{\sin y} - 2\sin y - 2$

6. $y' = \dfrac{x(x^2 + y^2 - 1)}{2y(x^2 - 1)}$ Отг. $y^2 = C\sqrt{x^2 - 1} + x^2 - 1$

7. $xy' + y = 2x^2 y \ln y.y', \quad y > 0$ Отг. $xy(C - \ln^2 y) = 1$

8. $y'x^3 \sin y + 2y = xy'$ Отг. $y = x^2(C - \cos y); y = 0$

9. $2y\text{d}y + (y^2 - 6x)\text{d}x = 0$ Отг. $y^2 = Ce^x + 6(x + 1)$

IV. Намерете решенията на уравненията на *Рикати*, ако допускат посочените частни интеграли:

1. $y' = x - \dfrac{1}{x}y + \dfrac{2}{x^3}y^2, \quad y_1(x) = x^2$ Отг. $y = \dfrac{x^2(C - x)}{C - 2x}$

2. $y' - y^2 - 2xy + x^2 + 5 = 0, \quad y_1(x) = (ax + b)$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y_1(x) = x + 2 \\ y = x + 2 + \dfrac{4}{Ce^{4x} - 1} \end{array} \right.$

3. $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}, \quad y_1(x) = \dfrac{1}{x}$ Отг. $y = \dfrac{3C + 2x^3}{3C - x^3}.$

ГЛАВА 4

ТОЧНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ. ИНТЕГРИРАЩИ МНОЖИТЕЛИ

А. Точни диференциални уравнения

Дефиниция 1 *Диференциално уравнение от първи ред от вида*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{4.1}$$

се нарича ***точно****, ако съществува функция $u(x,y)$, за която са изпълнени равенствата*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y). \tag{4.2}$$

Ако функциите $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ са дефинирани и непрекъснати в едносвързана област G и притежават непрекъснати частни производни $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в тази област, за да бъде уравнението точно, небходимо и достатъчно условие е

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{4.3}$$

Общият интеграл на (4.1) е

$$u(x,y) = c, \quad c = \text{const.}. \tag{4.4}$$

Функцията $u(x,y)$ може да бъде намерена по следния начин: интегрираме равенството $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$ по x при фиксирано y, като константата c в този случай може да зависи от y, т.е.

$$u(x,y) = \int P(x,y)\mathrm{d}x + \varphi(y). \tag{4.5}$$

От равенството

$$\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\mathrm{d}x + \varphi'(y) = Q(x,y). \tag{4.6}$$

определяме константата $\varphi(y)$ и заместваме в (4.5).

Точните диференциални уравнения *нямат* особени решения.

Задачата на Коши за уравнението (4.1) има единствено решение, когато за точката $M(x_0,y_0) \in G$ числата $P(x_0,y_0)$ и $Q(x_0,y_0)$ не са едновременно нули.

Пример 4.1. Решете уравнението

$$\frac{y}{x}\mathrm{d}x + (y^3 + \ln x)\mathrm{d}y = 0.$$

Решение. В даденото уравнение $P(x,y) = \dfrac{y}{x}, Q(x,y) = y^3 + \ln x$. Проверяваме условието (4.3):

$$P_y = \frac{1}{x}, \quad Q_x = \frac{1}{x} \Longrightarrow \text{уравнението е точно.}$$

Прилагаме формула (4.5):

$$u(x,y) = \int \frac{y}{x}\mathrm{d}x + \varphi(y) = y\ln x + \varphi(y).$$

От (4.6) имаме:

$$\frac{\partial}{\partial y}(y\ln x + \varphi(y)) = y^3 + \ln x \Longleftrightarrow \ln x + \varphi'(y) = y^3 + \ln x \Longleftrightarrow \varphi'(y) = y^3$$

$$\Longrightarrow \varphi(y) = \int y^3\mathrm{d}y = \frac{y^4}{4}.$$

Следователно $u(x,y) = y\ln x + \dfrac{y^4}{4}$, а *общият интеграл* на уравнението е:

$$y\ln x + \frac{y^4}{4} = c.$$

Пример 4.2. Намерете *общия интеграл* на уравнението

$$3x^2(1 + \ln y)\mathrm{d}x - (2y - \frac{x^3}{y})\mathrm{d}y = 0$$

и *интегралната крива* през точката $M_0(1,1)$.

Решение. В даденото уравнение $P(x,y) = 3x^2(1 + \ln y), Q(x,y) = \dfrac{x^3}{y} - 2y$. Проверяваме условието (4.3)

$$P_y = \frac{3x^2}{y}, \quad Q_x = \frac{3x^2}{y} \Longrightarrow \text{уравнението е точно.}$$

Според (4.5) имаме:

$$u(x,y) = \int \Big(\frac{x^3}{y} - 2y\Big)\mathrm{d}y + \varphi(x) = x^3\ln y - y^2 + \varphi(x).$$

Определяме $\varphi(x)$, прилагайки (4.6):

$$\frac{\partial}{\partial x}[(x^3\ln y - y^2) + \varphi(x)] = 3x^2(1+\ln y)$$

$$\Longleftrightarrow 3x^2\ln y + \varphi'(x) = 3x^2 + 3x^2\ln y \Longleftrightarrow \varphi'(x) = 3x^2 \Longleftrightarrow \varphi(x) = \int 3x^2\mathrm{d}x = x^3$$

$$\Longrightarrow u(x,y) = x^3\ln y - y^2 + x^3.$$

Общият интеграл на уравнението е

$$x^3(1+\ln y) - y^2 = c.$$

За точката $M_0(1,1)(x_0 = 1, y_0 = 1)$ от общия интеграл определяме константата c:

$$1 + \ln 1 - 1 = c \Longrightarrow c = 0.$$

Търсената интегрална крива е

$$x^3(1+\ln y) = y^2.$$

Б. Интегриращи множители

Дефиниция 2 *Ако за диференциалното уравнение* (4.1) *не е изпълнено условието* (4.3), *т.е. не е точно, но съществува функция* $\mu(x,y)$ *такава, че*

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0 \tag{4.7}$$

е точно, функцията $\mu(x,y)$ *се нарича* ***интегриращ множител***.

Интегриращият множител се намира трудно, с изключение на следните частни случаи:

а) Ако $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \Phi_1(x)$, то $\mu = \mu(x)$ и $\ln\mu = \displaystyle\int \Phi_1(x)\mathrm{d}x$;

б) Ако $\dfrac{Q_x - P_y}{P} = \Phi_2(y)$, то $\mu = \mu(y)$ и $\ln\mu = \displaystyle\int \Phi_2(y)\mathrm{d}y$;

в) Ако $w = w(x,y)$ и $\dfrac{Q_x - P_y}{Pw_y - Qw_x} = \Phi_3(w)$; то $\mu = \mu(w)$ и $\ln\mu = \displaystyle\int \Phi_3(w)\mathrm{d}w$.

Пример 4.3. *Решете* диференциалното уравнение

$$3(x+y)^2\mathrm{d}x + (3xy + 2x^2)\mathrm{d}y = 0.$$

Решение. В случая $P(x,y) = 3(x+y)^2, Q(x,y) = 3xy + 2x^2$. Проверяваме условието (4.3)

$$P_y = 6(x+y), \quad Q_x = 3y + 4x \Longrightarrow P_y \neq Q_x$$

и уравнението не е точно.

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{6x + 6y - 3y - 4x}{x(3y + 2x)} = \frac{2x + 3y}{x(3y + 2x)} = \frac{1}{x}.$$

Следователно, уравнението допуска интегриращ множител от вида $\mu = \mu(x)$ и $\ln\mu = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \iff \ln\mu = \ln x \iff \mu = x$. Уравнението

$$3x(x + y)^2\mathrm{d}x + x(3xy + 2x^2)\mathrm{d}y$$

е точно, защото

$$P_y = 6x(x + y), \quad Q_x = 2x(3y + 2x) + 2x^2 = 6x(x + y)$$

(изпълнено е условие (4.3)).

$$\text{От } u(x, y) = \int (3x^2y + 2x^3)\mathrm{d}y + \varphi(x) = \frac{3}{2}x^2y^2 + 2x^3y + \varphi(x)$$
$$\implies \frac{\partial}{\partial x}(\frac{3}{2}x^2y^2 + 2x^3y) + \varphi'(x) = 3x(x + y)^2$$
$$\iff 3xy^2 + 6x^2y + \varphi'(x) = 3x^3 + 6x^2y + 3xy^2 \iff \varphi'(x) = 3x^3$$
$$\implies \varphi(x) = 3\int x^3\mathrm{d}x = \frac{3}{4}x^4.$$

Общият интеграл е

$$\frac{3}{2}x^2y^2 + 2x^3y + \frac{3}{4}x^4 = \frac{c}{4} \iff 6x^2y^2 + 8x^3y + 3x^4 = c.$$

Пример 4.4. Намерете *интегриращ множител* и решете уравнението:

$$2xy\ln y + (x^2 + y^2\sqrt{y^2 + 1})y' = 0.$$

Решение. Тук $P(x, y) = 2xy\ln y$, $Q(x, y) = x^2 + y^2\sqrt{y^2 + 1}$. Уравнението не е точно, защото $P_y = 2x\ln y + 2x$, $Q_x = 2x$ и $P_y \neq Q_x$, но $\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{2x - 2x\ln y - 2x}{2xy\ln y} = -\frac{1}{y}$. Следователно, уравнението допуска интегриращ множител от вида $\mu = \mu(y)$ и $\ln\mu = -\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\ln y \implies \mu(y) = y^{-1}$. Уравнението

$$2x\ln y\mathrm{d}x + (\frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2 + 1})\mathrm{d}y = 0$$

е точно. От $u(x,y) = \displaystyle\int 2x\ln y\mathrm{d}x + \varphi(y) = x^2\ln y + \varphi(y)$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(x^2\ln y) + \varphi'(y) = \frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{x^2}{y} + \varphi'(y) = \frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1} \Longrightarrow \varphi'(y) = y\sqrt{y^2+1}\,.$$
$$\Longrightarrow \varphi(y) = \int y\sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int (y^2+1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(y^2+1) = \frac{(y^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

Общият интеграл на уравнението е

$$x^2\ln y + \frac{(y^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} = c.$$

Пример 4.5. Решете уравнението, ако съществува интегриращ множител от вида $\mu = \mu[y(x^2+y^2)]$:

$$y(x^2+y^2)\mathrm{d}x + x(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = 0.$$

Решение. Записваме уравнението във вида

$$[y(x^2+y^2) - xy]\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 0.$$

Тук $P(x,y) = y(x^2+y^2-x)$, $P_y = x^2+3y^2-x$; $Q(x,y) = x^2$, $Q_x = 2x$. От условието $w(x,y) = y(x^2+y^2)$, $w_x = 2xy$, $w_y = x^2+3y^2$ и

$$\frac{Q_x - P_y}{Pw_y - Qw_x} = \frac{2x - x^2 - 3y^2 + x}{y(x^2+3y^2)(x^2+y^2-x) - 2x^3y}$$
$$= \frac{3x - x^2 - 3y^2}{y(x^2+y^2)(x^2+3y^2-3x)} = -\frac{1}{y(x^2+y^2)} = -\frac{1}{w}$$
$$\Longrightarrow \ln\mu = -\int\frac{1}{w}\mathrm{d}w = \ln\frac{1}{w} \Longrightarrow \mu = \mu(w) = \frac{1}{w}.$$

Решаваме точното диференциално уравнение:

$$\frac{y(x^2+y^2) - xy}{y(x^2+y^2)}\mathrm{d}x + \frac{x^2}{y(x^2+y^2)}\mathrm{d}y = 0$$
$$\left(1 - \frac{x}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x + \frac{x^2}{y(x^2+y^2)}\mathrm{d}y = 0.$$

$$\text{От } u(x,y) = \int (1 - \frac{x}{x^2+y^2})\mathrm{d}x + \varphi(y) = x - \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \varphi(y)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\Big(x - \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big) + \varphi'(y) = \frac{x^2}{y(x^2+y^2)}$$

$$-\frac{y}{x^2+y^2} + \varphi'(y) = \frac{x^2+y^2-y^2}{y(x^2+y^2)}$$

$$-\frac{y}{x^2+y^2} + \varphi'(y) = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2+y^2} \Longleftrightarrow \varphi'(y) = \frac{1}{y} \Longleftrightarrow \varphi(y) = \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \ln y.$$

Общият интеграл на уравнението е

$$x - \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \ln y = -\frac{1}{2}\ln c \Longleftrightarrow \ln cy^2e^{2x} = \ln(x^2+y^2) \Longleftrightarrow x^2+y^2 = cy^2e^{2x}.$$

Особено решение на уравнението е $x = 0$.

Пример 4.6. Решете уравнението $(e^x - y)\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$.

Решение. Коефициентите в уравнението са $P(x,y) = e^x - y, Q(x,y) = 1$

От $P_y = -1$ и $Q_x = 0 (P_y \neq Q_x)$ следва, че уравнението не е точно.

Пресмятаме $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{-1}{1} = -1 \equiv \Phi_1(x)$. Следователно, за даденото уравнение съществува *интегриращ множител* $\mu = \mu(x)$.

$$\ln\mu = \int(-1)\mathrm{d}x = -x \Longrightarrow \mu = e^{-x}.$$

Уравнението $(1 - ye^{-x})\mathrm{d}x + e^{-x}\mathrm{d}y = 0$ е *точно*, тъй като от $P(x,y) = 1 - ye^{-x}$ и $Q(x,y) = e^{-x}$ имаме $P_y = -e^{-x}$, $Q_x = -e^{-x}$ и очевидно $P_y = Q_x$.

$$u(x,y) = \int e^{-x}\mathrm{d}y + \varphi(x) = ye^{-x} + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(ye^{-x} + \varphi(x)) = 1 - ye^{-x}$$

$$-ye^{-x} + \varphi'(x) = 1 - ye^{-x} \Longrightarrow \varphi'(x) = 1 \Longrightarrow \varphi(x) = x.$$

$$\Longrightarrow u(x,y) = x + ye^{-x}.$$

Общият интеграл на уравнението е

$$x + ye^{-x} = c.$$

Пример 4.7. Да се реши уравнението

$$(xy + y^2)\mathrm{d}x + (xy - 1)\mathrm{d}y = 0.$$

Решение. Едно решение на уравнението е $y = 0$. Нека $y \neq 0$. Коефициентите на уравнението са $P(x,y) = xy + y^2$, $Q(x,y) = xy - 1$. От $P_y = x + 2y$ и $Q_x = y$ ($P_y \neq Q_x$) следва, че уравнението не е точно. Тъй като

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{y - x - 2y}{xy + y^2} = \frac{-(x+y)}{y(x+y)} = -\frac{1}{y} \equiv \Phi_2(y)$$

следва, че съществува *интегриращ множител* $\mu = \mu(y)$ и

$$\ln\mu = -\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\ln|y| = \ln|\frac{1}{y}| \Longrightarrow \mu = \frac{1}{y}.$$

Уравнението $(x+y)\mathrm{d}x + (x - \frac{1}{y}) = 0$ е точно, защото $P(x,y) = x + y$, $Q(x,y) = x - \frac{1}{y}$ и $P_y = 1$, $Q_x = 1$ ($P_y = Q_x$).

$$u(x,y) = \int (x+y)\mathrm{d}x + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y)) = x - \frac{1}{y} \Longleftrightarrow x + \varphi'(y) = x - \frac{1}{y} \Longrightarrow \varphi'(y) = -\frac{1}{y}$$
$$\varphi(y) = -\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\ln|y| \Longrightarrow u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \ln|y|.$$

Общият интеграл на уравнението е

$$x^2 + 2xy - \ln y^2 = c,$$

а $y = 0$ е особено решение.

Пример 4.8. Да се реши уравнението

$$(2x^3y^2 - y)\mathrm{d}x + (2x^2y^3 - x)\mathrm{d}y = 0,$$

ако допуска интегриращ множител от вида $\mu = \mu(xy)$.

Решение. $x = 0$ и $y = 0$ са решения на уравнението. Нека $x \neq 0$, $y \neq 0$. От $P(x,y) = 2x^3y^2 - y$ и $Q(x) = 2x^2y^3 - x$ имаме $P_y = 4x^3y - 1$ и $Q_x = 4xy^3 - 1$ ($P_y \neq Q_x$) и уравнението не е точно. По условие $\mu = \mu(xy) \Longrightarrow w = xy \Longrightarrow w_x = y$, $w_y = x$. Изчисляваме

$$\frac{Q_x - P_y}{Pw_y - Qw_x} = \frac{4xy^3 - 1 - 4x^3y + 1}{x(2x^3y^2 - y) - y(2x^2y^3 - x)} = \frac{4xy(y^2 - x^2)}{2x^2y^2(x^2 - y^2)} = -\frac{2}{xy} = \Phi_3(xy)$$
$$\Longrightarrow \ln\mu = -2\int \frac{1}{xy}\mathrm{d}(xy) = -2\ln|xy| = \ln\frac{1}{x^2y^2}.$$

Следователно интегриращият множител е $\mu = \frac{1}{x^2y^2}$. Уравнението

$$\frac{2x^3y^2 - y}{x^2y^2}\mathrm{d}x + \frac{2x^2y^3 - x}{x^2y^2}\mathrm{d}y = 0$$

е *точно*, защото $P(x,y) = 2x - \frac{1}{x^2y}$ и $Q(x,y) = 2y - \frac{1}{xy^2} \Longrightarrow P_y = \dfrac{1}{x^2}$, $Q_x = \dfrac{1}{x^2}(P_y = Q_x) \Longrightarrow$ уравнението е точно.

$$u(x,y) = \int \Big(2x - \frac{1}{x^2y}\Big)\mathrm{d}x + \varphi(y) = x^2 + \frac{1}{xy} + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(x^2 + \frac{1}{xy} + \varphi(y)\Big) = 2y - \frac{1}{xy^2} \Longleftrightarrow -\frac{1}{xy^2} + \varphi(y) = 2y - \frac{1}{xy^2} \Longrightarrow \varphi'(y) = 2y$$

$$\varphi(y) = \int 2y\mathrm{d}y = y^2 \Longrightarrow u(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{xy}.$$

Следователно, общият интеграл на уравнението е

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{xy} = c \Longleftrightarrow (x^2 + y^2)xy + 1 = cxy.$$

Уравнението има и особени решения $x = 0, y = 0$.

ЗАДАЧИ

I. Решете *точните диференциални уравнения*:

1. $(2x + y)\mathrm{d}x + (x + 2y)\mathrm{d}y$ Отг. $x^2 + xy + y^2 = c$
2. $(10xy - 8y + 1)\mathrm{d}x + (5x^2 - 8x + 3)\mathrm{d}y = 0$ Отг. $5x^2y - 8xy + x + 3y = c$
3. $(y + \dfrac{2}{x^2})\mathrm{d}x + (x - \dfrac{3}{y^2})\mathrm{d}y = 0$ Отг. $xy - \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = c$
4. $(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} + y)\mathrm{d}x + (x + \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}})\mathrm{d}y = 0$
   Отг. $\sqrt{x^2 - y^2} + xy - \frac{1}{y} = c$
5. $(2x + e^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x + (1 - \dfrac{x}{y})e^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y = 0$ Отг. $x^2 + ye^{\frac{x}{y}} = c$
6. $2x\cos^2 y\mathrm{d}x + (2y - x^2\sin 2y)\mathrm{d}y = 0$ Отг. $x^2\cos^2 y + y^2 = c$
7. $(\sin y - y\sin x + \dfrac{1}{x})\mathrm{d}x + (x\cos y + \cos x - \dfrac{1}{y})\mathrm{d}y = 0$
   Отг. $x\sin y + y\cos x + \ln|\frac{x}{y}| = c$
8. $(3x^2 + 2y)\mathrm{d}x + (2x - 3)\mathrm{d}y = 0$ Отг. $x^2 + 2xy - 3y = c$
9. $(3x^2y - 4xy^2)\mathrm{d}x + (x^3 - 4x^2y + 12y^3)\mathrm{d}y = 0$ Отг. $x^3y - 2x^2y^2 + 3y^4 = c$

10. $(x\cos 2y + 1)\mathrm{d}x - x^2 \sin 2y\mathrm{d}y = 0$ Отг. $\dfrac{x^2\cos 2y}{2} + x = c$

11. $e^{-y}\mathrm{d}x + (1 - xe^{-y})\mathrm{d}y = 0$ Отг. $xe^{-y} + y = c.$

12. $(1 + y^2 \sin 2x)\mathrm{d}x = 2y\cos^2 x\mathrm{d}y$ Отг. $x - y^2\cos^2 x = c.$

II. Намерете *интегриращи множители и решете уравненията*:

1. $(x^2 - y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$ Отг. $\mu = \dfrac{1}{x^2}; x + \dfrac{y}{x} = c, x = 0$- особено решение

2. $2x\mathrm{tg}y\mathrm{d}x + (x^2 - 2\sin y)\mathrm{d}y = 0$ Отг. $\mu = \cos y; x^2\sin y + \dfrac{1}{2}\cos 2y = c;$

3. $(e^{2x} - y^2)\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$ Отг. $\mu = e^{-2x}; y^2 = (c - 2x)e^{2x}$

4. $(1 + 3x^2\sin y)\mathrm{d}x - x\mathrm{cotg}y\mathrm{d}y = 0$ Отг. $\mu = \dfrac{1}{\sin y}; \dfrac{x}{\sin y} + x^3 = c$

5. $y^2\mathrm{d}x + (yx - 1)\mathrm{d}y = 0$ Отг. $\mu = \dfrac{1}{y}; xy - \ln y = 0; y = 0$- особено решение

6. $(x^2 - 3y^2)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y = 0$
Отг. $\mu = x^{-4}; y^2 = cx^3 + x^2, x = 0$ - особено решение

7. $(\sin x + e^y)\mathrm{d}x + \cos x\mathrm{d}y = 0$ Отг. $\mu = e^{-y}; e^{-y}\cos x = c + x$

8. $(x\sin y + y)\mathrm{d}x + (x^2\cos y + x\ln x)\mathrm{d}y = 0$ Отг. $\mu = \dfrac{1}{x}; x\sin y + y\ln x = c$

9. $(e^x - y)\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$ Отг. $\mu = e^{-x}; ye^{-x} + x = c.$

10. $(xy + y^2)\mathrm{d}x + (xy - 1)\mathrm{d}y = 0$
Отг. $\mu = \dfrac{1}{y}; \dfrac{x^2}{2} + xy - \ln|y| = c, y = 0$ - особено решение

III. *Решете* диференциалните уравнения, ако съществува *интегриращ множител* от вида $\mu = \mu(w)$:

1. $(2x^2y + x)y' = x^2y^3 - 2xy^2 - y, w = xy$
Отг. $\mu = \dfrac{1}{(xy)^3}; \ln|x| + \dfrac{2}{xy} + \dfrac{1}{2x^2y^2} = c$

2. $y^2\mathrm{d}x + (xy + \mathrm{tg}(xy))\mathrm{d}y = 0, w = xy$ Отг. $\mu = \cos(xy); y\sin(xy) = c$

3. $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + x(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = 0, w = x^2 + y^2$
Отг. $\mu = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}; y - 1 = c\sqrt{x^2 + y^2}$

4. $3y^2 - x = (6xy - 2y^3)y', w = x + y^2$
Отг. $\mu = (x + y^2)^{-3}; (x + y^2)^2 = c(x - y^2)$

5. $(x^2 + 3\ln y)y = xy', w = x^4y$
Отг. $\mu = \dfrac{1}{x^4y}; x^2 + \ln y = cx^3, x = 0$ - особено решение

6. $xy^2\mathrm{d}x + (x^2y - x)\mathrm{d}y = 0, w = xy$
Отг. $\mu = \dfrac{1}{xy}; xy - \ln|y| = c, x = 0, y = 0$ - особени решения.

ГЛАВА 5

РЕШАВАНЕ НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ЧРЕЗ ПРЕДВАРИТЕЛНО ДИФЕРЕНЦИРАНЕ. УРАВНЕНИЯ НА ЛАГРАНЖ И НА КЛЕРО

Ще разгледаме различни класове диференциални уравнения, които се решават чрез предварително диференциране.

I клас

Разглеждаме уравнение от вида

$$y = f(y'), \tag{5.1}$$

което не съдържа независимата променлива x на търсената функцция $y(x)$.

Решение. Полагаме $y' = p$, $p \neq 0$, заместваме в (5.1), получаваме уравнението $y = f(p)$, диференцираме го по x и получаваме:

$$y' = f'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \Leftrightarrow p = f'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \Leftrightarrow \int \mathrm{d}x = \int \frac{f'(p)}{p}\mathrm{d}p \Leftrightarrow x = \Phi(p) + C.$$

Тогава *общият интеграл на (5.1)* е

$$\left| \begin{array}{l} x = \Phi(p) + C \\ y = f(p), \end{array} \right. \tag{5.2}$$

записан в *параметричен вид*, при това, ако е възможно да елиминираме параметъра p от (5.2) ще получим $y = y(x, C)$, т.е. *общия интеграл в явен вид.*

Пример 5.1. Решете уравнението $y = y'^2 + 2y'^3$.

Решение. Полагаме $y' = p$, заместваме в уравнението, получаваме уравнението $y = p^2 + 2p^3$, диференцираме го по x и получаваме:

$$p = y' = (2p + 6p^2)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \Longleftrightarrow 1 = (2 + 6p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \quad p \neq 0.$$

Тогава от $1 = (2+6p)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \displaystyle\int \mathrm{d}x = \int (2+6p)\mathrm{d}p \Rightarrow x = 2p + 3p^2 + C.$

И така, *общият интеграл* на уравнението в *параметричен вид* е

$$\left| \begin{array}{l} x = 2p + 3p^2 + C \\ y = p^2 + 2p^3. \end{array} \right.$$

От уравнението $3p^2 + 2p + (C - x) = 0$ намираме $p = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 3(C-x)}}{3}$ и като заместим в $y = p^2 + 2p^3$, получаваме *общия интеграл в явен вид.*

II клас

Разглеждаме уравнение от вида

$$x = f(y'), \tag{5.3}$$

което не съдържа търсената функция $y(x)$.

Решение. Полагаме $y' = p$, заместваме в (5.3), получаваме уравнението $x = f(p)$, диференцираме го по x и получаваме:

$$1 = f'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = f'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(p)p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$

Тогава от $\int \mathrm{d}y = \int pf'(p)\mathrm{d}p \Rightarrow y = \Phi(p) + C$, а *общият интеграл в параметричен вид е*:

$$\left| \begin{array}{l} x = f(p) \\ y = \Phi(p) + C. \end{array} \right. \tag{5.4}$$

Пример 5.2. Решете уравнението $x = \ln y' + \sin y'$.

Решение. Полагаме $y' = p$, заместваме в уравнението, получаваме уравнението $x = \ln p + \sin p$, диференцираме го по x и получаваме:

$$1 = (\frac{1}{p} + \cos p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = p(\frac{1}{p} + \cos p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = (1 + p\cos p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$

Тогава от $\mathrm{d}y = (1 + p\cos p)\mathrm{d}p$ получаваме последователно

$$\begin{aligned} y &= \int (1 + p\cos p)\mathrm{d}p + C = \int \mathrm{d}p + \int p\cos p\mathrm{d}p + C = p + \int p\mathrm{d}\sin p + C \\ &= p + p\sin p - \int \sin p\mathrm{d}p + C = p + p\sin p + \cos p + C. \end{aligned}$$

Общият интеграл на уравнението в *параметричен вид е*

$$\left| \begin{array}{l} x = \ln p + \sin p \\ y = p + p\sin p + \cos p + C. \end{array} \right.$$

В този случай не е възможно да се елиминира параметъра p.

III клас

Разглеждаме уравнение от вида

$$f(y, y') = 0, \tag{5.5}$$

което е нерешимо нито спрямо y, нито спрямо y'.

Решение. Предполагаме, че $y = \varphi(p)$, $y' = \Psi(p)$, p-параметър и е изпълнено $f[\varphi(p), \psi(p)] \equiv 0$.

От

$$y = \varphi(p) \Rightarrow y' = \varphi'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \Psi(p) = \varphi'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$
$$\Rightarrow \int \mathrm{d}x = \int \frac{\varphi'(p)}{\psi(p)}\mathrm{d}p + C \Rightarrow x = \Phi(p) + C.$$

Тогава *общият интеграл в параметричен вид е*

$$\left| \begin{array}{l} x = \Phi(p) + C \\ y = \varphi(p). \end{array} \right. \tag{5.6}$$

Аналогично се разглежда диференциално уравнение от вида $f(x, y') = 0$.

Пример 5.3. Решете уравнението $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$.

Решение. Полагаме $y' = px$, заместваме в уравнението и получаваме $x = \Phi(p)$:

$$x^3 + p^3x^3 - 3px^2 = 0 \Leftrightarrow x + p^3x - 3p = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3p}{p^3+1}.$$

От $y' = px \Rightarrow y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3p^2}{p^3+1}$ и като диференцираме уравнението за x получаваме

$$1 = \frac{3(p^3+1) - 9p^3}{(p^3+1)^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \Longleftrightarrow 1 = 3\frac{1-2p^3}{(p^3+1)^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}$$
$$\Longleftrightarrow 1 = 3\frac{1-2p^3}{(p^3+1)^2}\frac{3p^2}{p^3+1}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \Longleftrightarrow \int \mathrm{d}y = 9\int \frac{p^2 - 2p^5}{(p^3+1)^3}\mathrm{d}p + C.$$

Получихме интеграл от рационална функция. Разлагаме подинтегралната функция в сума от елементарни дроби (с помощта на девет непознати константи) и след като решим получените шест интеграла намираме $y = \Phi_0(p) + C$.

Общият интеграл на уравнението в *параметричен вид е*

$$\left| \begin{array}{l} x = \dfrac{3p}{p^3+1} \\ y = \Phi_0(x) + C. \end{array} \right.$$

IV клас

Разглеждаме уравнение от вида (*уравнение на Лагранж*)

$$y = f(y')x + g(y'), \tag{5.7}$$

където $f(y')$ и $g(y')$ са дадени функции на y', $f(y') \neq y'$.

Решение. Ако $y(x)$ е решение на (5.7), т.е. $y(x) \equiv f[y'(x)]x + g[y'(x)]$, като положим $y'(x) = p(x)$ получаваме

$$y(x) = f[p(x)]x + g[p(x)]. \tag{5.8}$$

Диференцираме (5.8) по x и получаваме

$$p = xf'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + f(p) + g'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \Longrightarrow [p - f(p)]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = xf'(p) + g'(p)$$

$$\Longrightarrow x' = \frac{f'(p)}{p - f(p)}x + \frac{g'(p)}{1 - f(p)}. \tag{5.9}$$

Решаваме полученото линейно диференциално уравнение и намираме $x = \Phi(p, C)$. Тогава *общият интеграл* на уравнението (5.7) в параметрична форма е

$$\left| \begin{array}{l} x = \Phi(p, C) \\ y = f(p)\Phi(p, C) + g(p). \end{array} \right.$$

Пример 5.4. Решете уравнението $y = 2y'x + \ln y'$.

Решение. Полагаме $y' = p(x)$ и получаваме

$$y = 2px + \ln p. \tag{5.10}$$

Диференцираме (5.10) по x и получаваме последователно

$$p = y' = 2p + 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

$$(p - 2p)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = 2x + \frac{1}{p}$$

$$x' = -\frac{2}{p}x - \frac{1}{p^2} \text{ (линейно диференциално уравнение)}$$

$$x = \frac{1}{p^2}(C - p).$$

От (5.10) намираме

$$y = 2p\frac{1}{p^2}(C - x) + \ln p = \frac{2}{p}(C - p) + \ln p.$$

Намерената двойка (x, y) определя *общото решение* на даденото уравнение в *параметричен вид.*

От $xp^2 + p - C = 0$ намираме $p_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4Cx}}{2x}$ и тогава *общото решение в явен вид* е

$$y = -1 \pm \sqrt{1+4Cx} + \ln \frac{-1 \pm \sqrt{1+4Cx}}{2x}.$$

Забележка. Вторият начин за решаване на задачата може да се приложи изобщо за уравнение на Лагранж (от вида(5.7)), като общото решение се получи най-общо в параметричен вид.

Пример 5.5. Решете уравнението $xy'^2 = y - y'$.

Решение. Полагаме $y' = p(x)$ и полученото уравнение $y = p^2x + p$ диференцираме по x, след което написваме последователно

$$p = y' = p^2 + 2px\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

$$(1-p^2)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = 2px + 1$$

$$x' = \frac{2}{1-p}x + \frac{1}{p(1-p)} \quad \text{(линейно диференциално уравнение)}$$

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}(C + \ln p - p).$$

Тогава *общото решение* на даденото уравнение в *параметричен вид* е

$$\left| \begin{aligned} x &= \frac{1}{(p-1)^2}(C + \ln p - p) \\ y &= \frac{p^2}{(p-1)^2}(C + \ln p - p) + p. \end{aligned} \right.$$

V клас

Разглеждаме уравнение от вида *(уравнение на Клеро)*

$$y = y'x + g(y'), \tag{5.11}$$

където $g(y')$ е позната функция на y'.

Решение. Ако $y(x)$ е решение на (5.11), т.е. $y(x) \equiv y'x + g[y'(x)]$, като положим $y'(x) = p(x)$ получаваме

$$y(x) = px + g[p(x)]. \tag{5.12}$$

Диференцираме (5.12) по x и получаваме

$$p = y' = p.1 + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + g'[p(x)]\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{5.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x + g'[p(x)]) = 0. \tag{5.14}$$

а) От $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow p = C_1 \Rightarrow y = C_1x + g(C_1)$.

Тогава фамилията прави с уравнение $y = C_1x + g(C_1)$ са *решения на уравнението на Клеро*;

б) От $x + g'[p(x)] = 0$ намираме $x = -g'(p)$ и като заместим в (5.12) получаваме $y = -pg'(p) + g(p)$. Тогава

$$\left| \begin{array}{l} x = -g'(p) \\ y = -pg'(p) + g(p) \end{array} \right.$$

определят *решението в параметричен вид* и ако е възможно изключваме параметъра.

И така, освен фамилията прави уравнението на Клеро има още едно решение. Може да се докаже, че това решение е *обвивка* на фамилията прави.

Пример 5.6. Решете уравнението $y = y'x + \frac{a}{2y'}$, където $a = \text{const}$.

Решение. Полагаме $y' = p(x)$ и полученото уравнение $y = px + \frac{a}{2p}$ диференцираме по x, след което написваме последователно

$$p = y' = p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{a}{2}(-\frac{1}{p^2})\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x - \frac{a}{2p^2}) = 0.$$

а) От $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow p = y' = C_1 \Rightarrow y = C_1x + C_2$ и като заместим в даденото уравнение получаваме

$$C_1x + C_2 = C_1x + \frac{a}{2C_1} \Longleftrightarrow C_2 = \frac{a}{2C_1}.$$

Тогава *фамилията прави* с уравнение $y = C_1x + \frac{a}{2C_1}$ *са решения* на даденото уравнение;

б) От $x - \frac{a}{2p^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2p^2}$ и като заместим в $y = px + \frac{a}{2p}$ получаваме $y = \frac{a}{p}$. Така получаваме решение (крива) с параметрични уравнения

$x = \dfrac{a}{2p^2}$, $y = \dfrac{a}{p}$ и като изключим параметъра p получаваме $y^2 = 2ax$ (парабола).

Може да се докаже, че получената парабола е обвивка на фамилията прави (във всяка точка на параболата минава права от фамилията).

ЗАДАЧИ

I. *Решете* уравненията от вида $y = f(y')$ или $x = f(y')$:

1. $y = 1 + y'^2$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = 1 \\ y = 1 + \dfrac{(x-C)^2}{4} \end{array} \right.$

2. $y = y'^2 + y'^3$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = 2p + \frac{3}{2}p^2 + C \\ y = p^2 + p^3 \end{array} \right.$

3. $x = 2y' - \dfrac{1}{y'^2}$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = 2p - \dfrac{1}{p^2} \\ y = p^2 - \dfrac{2}{p} + C \end{array} \right.$

4. $x = \dfrac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$, $a = \text{const.}$ Отг. $x^2 + (y-C)^2 = a^2$

5. $2yy' = 1 + y'^2$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = \ln|p| + \dfrac{1}{4p^2} + C \\ y = \dfrac{1}{2p} + p \end{array} \right.$

6. $y'^3 + 4yy' - y'^2 + 4y = 0$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}\ln|p+1| - \dfrac{1}{2}p - \dfrac{1}{2(p+1)} + C \\ y = \dfrac{p^2 - p^3}{4(p+1)} \end{array} \right.$

7. $4xy' - y' = 0$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = (y-C)^2 \\ x = 0 \end{array} \right.$

8. $y = (y'-1)e^{y'}$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = e^p + C \\ y = (p-1)e^p \end{array} \right.$

9. $y = y'\sqrt{1+y'^2}$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = 2\sqrt{1+p^2} - \ln\left|\dfrac{1}{p} + \sqrt{\dfrac{1}{p^2} + 1}\right| + C \\ y = p\sqrt{1+p^2} \\ y = 0 \text{ - особено решение} \end{array} \right.$

10. $x = y'^3 - y' + 2$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = p^3 - p + 2 \\ y = \dfrac{3p^4}{4} - \dfrac{p^2}{2} + C \end{array} \right.$

11. $x = y'\cos y'$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = p\cos p \\ y = p^2\cos p - p\sin p - \cos p + C \end{array} \right.$

12. $x = 2y' - \ln y'$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = 2p - \ln p \\ y = p^2 - p + C \end{array} \right.$

II. *Решете* уравненията от вида $F(y, y') = 0$, $F(x, y') = 0$ или $F(x, y, y') = 0$:

1. $x^3 - y'^3 = xy'$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = \dfrac{p}{1-p^3} \\ y = \dfrac{4p^3 - 1}{6(1-p^3)} + C \end{array} \right.$

2. $y'^2 + xy' - x^2 = 0$ Отг. $y = \dfrac{x^2}{4}(-1 \pm \sqrt{5}) + C$

3. $y = y'^2 + xy' - x$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = Ce^p - 2(p+1) \\ y = C(p-1)e^p - p^2 + 2 \end{array} \right.$

4. $x = y'^2 + \dfrac{y}{y'}$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = Cx - C^3 \\ y = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} x^{\frac{2}{3}} \text{ – особено решение} \end{array} \right.$

5. $y = \dfrac{y'^2}{2} + 2xy' + x^2$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = Cx - \dfrac{1}{2}(C^2 + x^2) \\ y = -x^2 \text{ – особено решение} \end{array} \right.$

6. $xy'^2 + 2xy' - y = 0$ Отг. $\left| \begin{array}{l} (y - C)^2 = 4Cx \\ y = -x \text{ – особено решение} \end{array} \right.$

7. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$ Отг. $(x^2y - C)(xy - C) = 0$

III. *Решете уравненията на Лагранж*:

1. $y = 2xy' + \dfrac{1}{y'^2}$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = \dfrac{C}{p^2} + \dfrac{2}{p^3} \\ y = \dfrac{2C}{p} - \dfrac{3}{p^2} \end{array} \right.$

2. $y = \dfrac{1}{2}(xy' + y' \ln y')$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = Cp - \ln p - 2 \\ y = \dfrac{Cp^2}{2} - p \end{array} \right.$

3. $y = xy'^2 + y'^3$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = \dfrac{C}{(1-p)^2} - p - \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{Cp^2}{(1-p)^2} - \dfrac{p^2}{2} \end{array} \right.$

4. $y = xy'^2 + y'^2$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = \dfrac{C}{(1-p)^2} - 1 \\ y = \dfrac{Cp^2}{(1-p)^2} \end{array} \right.$

5. $2yy' = x(y'^2 + 4)$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = Cx^2 + \dfrac{1}{C} \\ y^2 - 4x^2 = 0 \end{array} \right.$

6. $y = yy'^2 + 2xy'$ Отг. $2Cx = C^2 - y^2$

7. $y = x\dfrac{1+y'^2}{2y'}$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = \dfrac{Cx^2}{2} + \dfrac{1}{2C} \\ y = \pm x \end{array} \right.$

8. $y = x(1+y') + y'^2$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = Ce^{-p} + 2(1-p) \\ y = Ce^{-p}(1+p) + 2 - p^2 \end{array} \right.$

9. $x = y(\dfrac{1}{\sqrt{y'}} - \dfrac{1}{y'})$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = \dfrac{C^2}{C-x} \\ y = 4x \end{array} \right.$

10. $y = y'^2(x+1)$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = (\sqrt{x+1} + C)^2 \\ y = 0 - \text{особено решение} \end{array} \right.$

11. $2y = \dfrac{xy'^2}{y'+2}$ Отг. $\left| \begin{array}{l} 2Cy = (Cx-2)^2 \\ \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y = 4x \end{array} \right\} \text{ особени решения} \end{array} \right.$

12. $xy'^2 + 2xy' - y = 0$ Отг. $\left| \begin{array}{l} (y-C)^2 = 4Cx \\ \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y = -x \end{array} \right\} \text{ особени решения} \end{array} \right.$

IV. Решете *уравненията на Клеро*:

1. $y = xy' + y'^2$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = Cx + C^2 \\ x^2 + 4y = 0 \end{array} \right.$

2. $y = xy' - 3y'^3$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = Cx - 3C^2 \\ 9y \pm 2x\sqrt{x} = 0 \end{array} \right.$

3. $xy' + \dfrac{1}{y'} = y$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = Cx + \dfrac{1}{C} \\ y^2 = 4x \end{array} \right.$

4. $y = xy' + \sqrt{1+y'^2}$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = Cx + \sqrt{1+C^2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right.$

5. $y = xy' + \sin y'$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = Cx + \sin C \\ y = x(\pi - \arccos x) + \sqrt{1-x^2} \end{array} \right.$

6. $xy' - y = \ln y'$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = Cx - \ln C \\ y = \ln x - 1 \end{array} \right.$

7. $y = xy' + y' + \sqrt{y'}$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = Cx + C + \sqrt{C} \\ y = -\dfrac{1}{4(x+1)} \end{array} \right.$

8. $y = xy' - e^{y'}$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = Cx - e^C \\ y = x(\ln x + 1) \end{array} \right.$

9. $y = xy' + \cos y'$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = Cx + \cos C \\ y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} \end{array} \right.$

10. $y = xy' - y'^4$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = Cx - C^4 \\ y = \dfrac{3x^{\frac{4}{3}}}{4\sqrt[3]{4}} \end{array} \right.$

11. $y = xy' + a\sqrt[3]{1 - y'^3}$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = Cx + a\sqrt[3]{1 - C^3} \\ y^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \end{array} \right.$

12. $y = y'(x + 1) + y'^2$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = Cx + C + C^2 \\ y = -\dfrac{(x+1)^2}{4} \end{array} \right.$

13. $y' = \ln(xy' - y)$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = Cx - e^C \\ y = x(\ln x - 1) \end{array} \right.$

14. $y = xy' + y' + y'^2$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = C(x + 1) + C^2 \\ y = -\dfrac{(x+1)^2}{4}. \end{array} \right.$

ГЛАВА 6

НЯКОИ КЛАСОВЕ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ПО-ВИСОК РЕД (ПОНИЖЕНИЕ РЕДА НА УРАВНЕНИЕТО)

I клас

Разглеждаме уравнение от вида $y^{(n)} = f(x)$, където $f(x)$ е функция, интегрируема в някакъв отворен интервал, а $n \geq 1$ – цяло. Такова уравнение се решава като интегрираме последователно двете му страни.

Пример 6.1. Решете уравнението $y''' = \sin x + \cos x$.

Решение. От $y''' = \sin x + \cos x \Rightarrow y'' = \int (\sin x + \cos x)\mathrm{d}x + C_1$

$$\Longrightarrow y'' = -\cos x + \sin x + C_1 \Rightarrow y' = \int (-\cos x + \sin x + C_1)\mathrm{d}x + C_2$$

$$\Longrightarrow y' = -\sin x - \cos x + C_1 x + C_2$$

$$\Longrightarrow y = \int (-\sin x - \cos x + C_1 x + C_2)\mathrm{d}x + C_3$$

$$\Longrightarrow y = \cos x - \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \quad \text{(общ интеграл).}$$

II клас

Разглеждаме уравнение от вида $f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, където k е цяло число, $1 \leq k \leq n$ (ако $k = n$ получаваме уравнение от вида $y^{(n)} = f(x)$). Посредством субституцията $y^{(k)} = z$ получаваме уравнение $f(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$, в което редът е намален с k единици. Решението $z = z(x)$ (ако успеем да го намерим), заместваме в субституцията и получаваме уравнение от вида $y^{(k)} = z(x)$, т.е. уравнение от I клас.

Пример 6.2. Решете уравнението $(x-2)y'' + y' = 0$.

Решение. Полагаме $y' = z \Longrightarrow y'' = z' \quad (k = 1)$, заместваме и получаваме уравнението $(x-2)z' + z = 0$. Тогава

$$(x-2)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -z \Longleftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\int \frac{\mathrm{d}(x-2)}{x-2} + \ln C_1$$

$$\Longleftrightarrow \ln|z| + \ln|x-2| = \ln C_1 \Longleftrightarrow |z(x-2)| = C_1$$

$$\Longleftrightarrow z = y' = \frac{C_1}{x-2} \Longleftrightarrow \int \mathrm{d}y = C_1 \int \frac{\mathrm{d}(x-2)}{x-2} + C_2$$

$$\Longleftrightarrow y = C_1 \ln|x-2| + C_2 \quad \text{(общ интеграл).}$$

III клас

Разглеждаме уравнение от вида $f(y, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, където k е цяло, $1 \leq k \leq n$. При $k = 1$ получаваме частен случай $f(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$. Редът на такова уравнение може да се намали само с единица. (В динамиката уравненията са най-често от втори ред.)

Пример 6.3. Решете уравнението $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.

Решение. Полагаме $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = p(y) \Longrightarrow y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ и като заместим получаваме *Бернулиево* диференциално уравнение:

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p^2 = 2e^{-y} \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -p + 2e^{-y}p^{-1}.$$

Като положим $p^2 = z \Longrightarrow 2p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$ и отново заместим получаваме *линейно* диференциално уравнение от първи ред:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -2z + 4e^{-y} \Longrightarrow z = e^{-2\int \mathrm{d}y}[C_1 + 4\int e^{-y}e^{2\int \mathrm{d}y}\mathrm{d}y]$$

$$\Longrightarrow z = p^2 = e^{-2y}(C_1 + 4e^y) \Longrightarrow p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\frac{\sqrt{C_1 + 4e^y}}{e^y}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{e^y\mathrm{d}y}{\pm\sqrt{4e^y + C_1}} = \int \mathrm{d}x + \frac{C_2}{2} \Longrightarrow \pm\sqrt{4e^y + C_1} = 2x + C_2$$

$$\Longrightarrow 4e^y + C_1 = (2x + C_2)^2 - \text{(общ интеграл)}.$$

IV клас

Разглеждаме уравнение от вида $f(y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, където k е цяло, $1 \leq k \leq n$. Като положим $y^{(k)} = z$ получаваме уравнение $f(z, z', z'', ..., z^{(n-k)}) = 0$, което е от III клас и като определим $z = z(x)$, ако е възможно, получаваме уравнение $y^{(k)} = z(x)$ от I клас.

Пример 6.4. Решете уравнението $y'y''' - 3y''^2 = 0$.

Решение. Полагаме $y' = p(y)$. Тогава

$$y'' = (p(y))' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y};$$

$$y''' = (p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y})' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y})^2 + p^2\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}y^2}.$$

$$\Longrightarrow p[p(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y})^2 + p^2\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}y^2}] - 3(p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y})^2 = 0 \Longleftrightarrow p^2(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y})^2 + p^3\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}y^2} - 3p^2(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y})^2 = 0$$

$$\Longrightarrow p^3\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}y^2} - 2p^2(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y})^2 = 0| : p^2 \neq 0 \Longleftrightarrow p\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}y^2} - 2(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y})^2 = 0.$$

Полагаме $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = z(p) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}p}.$

$$\Longrightarrow pz\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}p} - 2z^2 = 0| : z \neq 0 \Longleftrightarrow p\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}p} - 2z = 0 \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{z} - 2\frac{\mathrm{d}p}{p} = 0;$$

$$\Longrightarrow \ln|z| - \ln p^2 = \ln C \Longrightarrow z = Cp^2.$$

От $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = Cp^2 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p^2} = C_1\mathrm{d}y \Longrightarrow -\frac{1}{p} - C_1y = C_2.$

От $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{p} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -C_1y - C_2$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}x = -(C_1y + C_2)\mathrm{d}y \Longrightarrow x = -(C_1\frac{y^2}{2} + C_2y) + C_3.$$

$$\Longrightarrow x + \overline{C_1}y^2 + \overline{C_2}y + C_3 = 0 \quad (\overline{C_1} = \frac{C_1}{2}; \overline{C_2} = C_2; \overline{C_3} = -C_3).$$

От $p^2 = 0 \Longrightarrow p = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \Longrightarrow y = C.$

От $z = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 0 \Longrightarrow p = C \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C \Longrightarrow y = C_1x + C_2.$

Решенията $y = C$ и $y = C_1x + C_2$ *са особени*, защото не могат да се получат от общия интеграл.

V клас

Разглеждаме уравнение от вида $f(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y} \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}) = 0$, $y \neq 0$, което е хомогенно по отношение на y и производните му. Полагаме $\frac{y'}{y} = z$, като редът на диференциалното уравнение ще се понижи с единица:

От $y'\frac{1}{y} = z \Longrightarrow y''\frac{1}{y} - y'\frac{y'}{y^2} = z' \Longrightarrow \frac{y''}{y} = z' + z^2;$

От $y''\frac{1}{y} = z' + z^2 \Longrightarrow \frac{y'''}{y} - y''(-\frac{y'}{y^2}) = z'' + 2zz'$

$$\Longrightarrow \frac{y'''}{y} = z'' + 2zz' + z(z' + z^2) = z'' + 3zz' + z^3 \quad \text{и т.н.}$$

Пример 6.5. Решете уравнението $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

Решение. Делим уравнението на $y^2 (y \neq 0)$, получаваме $x^2\frac{y''}{y} = (1 - x\frac{y'}{y})^2$, полагаме $\frac{y'}{y} = z \Longrightarrow y''\frac{1}{y} + y'(-\frac{1}{y^2})y' = z' \Longrightarrow \frac{y''}{y} = z' + z^2$ и заместваме:

$$x^2(z' + z^2) = (1 - xz)^2,$$
$$x^2z' + x^2z^2 = 1 - 2xz + x^2z^2.$$

Полученото уравнение $z' = -\frac{2}{x}z + \frac{1}{x^2}$ е *линейно* относно z и има общо решение $z = \frac{1}{x^2}(C + x)$. Тогава от $y' = yz \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = yz \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{C + x}{x^2}\mathrm{d}x$.

Накрая решаваме последното уравнение с *отделени променливи* и намираме общия интеграл на даденото уравнение:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = C\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \ln C_1$$
$$\Longleftrightarrow \ln|y| = C(-\frac{1}{x}) + \ln|x| + \ln C_1 \Longleftrightarrow \ln|y| + \ln e^{\frac{C}{x}} = \ln(C_1x)$$
$$\Longleftrightarrow \ln(ye^{\frac{C}{x}}) = \ln(C_1x) \Longleftrightarrow ye^{\frac{C}{x}} = C_1x \Longrightarrow y = C_1xe^{-\frac{C}{x}}.$$

Пример 6.6. Решете уравнението $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$.

Решение. Делим уравнението на $y^2(y \neq 0)$, получаваме $x\frac{y''}{y} + x(\frac{y'}{y})^2 - \frac{y'}{y} = 0$, полагаме $\frac{y'}{y} = z \Longrightarrow y''\frac{1}{y} + y'(-\frac{1}{y^2})y' = z' \Longrightarrow \frac{y''}{y} = z' + z^2$ и заместваме:

$$x(z' + z^2) + xz^2 - z = 0.$$

Полученото уравнение $z' = \frac{1}{x}z - 2z^2$ е *Бернулиево* относно z и като го умножим със z^{-2}, положим $z^{-1} = u \Longrightarrow -z^{-2}z' = u'$ и заместим, получаваме *линейно* диференциално уравнение относно u:

$$u' = -\frac{1}{x}u + 2$$
$$\frac{1}{z} = u = e^{-\int \frac{\mathrm{d}x}{x}}[C + 2\int e^{\int \frac{\mathrm{d}x}{x}}\mathrm{d}x] = \frac{1}{x}(C + x^2) \Longrightarrow z = \frac{x}{C + x^2}.$$

Тогава от

$$\frac{y'}{y} = z \Longrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{x}{C + x^2} \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{x\mathrm{d}x}{C + x^2} + \ln C_1$$
$$\Longrightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}\ln|C + x^2| + \ln C_1 \Longrightarrow y = C_1\sqrt{C + x^2} \quad \text{(общ интеграл).}$$

Пример 6.7. Решете уравнението $\dfrac{y''^2 - y'y'''}{y'^2} = \dfrac{1}{x^2}$.

Решение. Умножаваме лявата страна на уравнението с $\dfrac{y''^2}{y''^2}$:

$$\frac{y''^2 - y'y'''}{y'^2}\frac{y''^2}{y''^2} = \frac{1}{x^2} \Longrightarrow \frac{y''^2 - y'y'''}{y''^2} = \frac{1}{x^2}\frac{y'^2}{y''^2}.$$

Лявата част на уравнението е производна по x на израза $\dfrac{y'}{y''}$. Полагаме $\dfrac{y'}{y''} = p(x)$

$$\Longrightarrow (\frac{y'}{y''})' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \Longrightarrow (\frac{y'}{y''})' = \frac{1}{x^2}(\frac{y'}{y''})^2 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{p^2}{x^2} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Полученото уравнение с *отделени променливи* решаваме чрез интегриране:

$$-\frac{\mathrm{d}p}{p^2} = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \Longrightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{x} + C_1 \Longrightarrow p = \frac{x}{1 + C_1x}$$

$$\Longrightarrow \frac{y'}{y''} = \frac{x}{1 + C_1x} \Longrightarrow y''\frac{x}{1 + C_1x} - y' = 0.$$

Правим второ полагане $y' = z$

$$\Longrightarrow y'' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \Longrightarrow \frac{x}{1 + C_1x}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - z = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{z} - \frac{(1 + C_1x)\mathrm{d}x}{x} = 0.$$

Тогава

$$\ln|z| - \ln|x| - C_1x = \ln C_2 \Longrightarrow z = C_2xe^{C_1x} \Longrightarrow y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_2xe^{C_1x}$$

$$\Longrightarrow y = C_2\int xe^{C_1x}\mathrm{d}x = \frac{C_2}{C_1}\int x\mathrm{d}e^{C_1x} = \frac{C_2}{C_1}(xe^{C_1x} - \int e^{C_1x}\mathrm{d}x)$$

$$= \frac{C_2}{C_1}(xe^{C_1x} - \frac{1}{C_1}e^{C_1x}) + C_3 \Longrightarrow y = \frac{C_2}{C_1^2}e^{C_1x}(C_1x - 1) + C_3$$

$$\Longrightarrow y = \overline{C_2}e^{C_1x}(C_1x - 1) + C_3, \qquad \overline{C_2} = \frac{C_2}{C_1^2}.$$

ЗАДАЧИ

I. Намерете *общото и частно* решение (при дадени начални условия) на уравненията:

1. $y''' = \dfrac{6}{x^3}, y(1) = 2; y'(1) = 1; y''(1) = 1$ Отг. $y = 3\ln|x| + \dfrac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3$
$y = 3\ln|x| + 2x^2 - 6x + 6$

2. $y = 4\cos 2x, y(0) = y'(0) = 0$ Отг. $y = C_2 + C_1x - \cos 2x$, $y = 1 - \cos 2x$

3. $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$ Отг. $y = x\mathrm{arctg}x - \ln\sqrt{1+x^2} + C_1x + C_2$

4. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, y(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{\ln 2}{2}; y'(\frac{\pi}{4}) = 1$ Отг. $y = C_2 + C_1x - \ln|\cos x|$, $y = -\ln|\cos x|$

5. $y'' = x + \sin x$ Отг. $y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2$

6. $y^{\text{iv}} = \dfrac{1}{x}$ Отг. $y = \dfrac{x^3}{6}\ln|x| + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$

7. $xy''' = 2x + 3, x \neq 0$ Отг. $y = \dfrac{3}{2}x^2\ln|x| + \dfrac{x^3}{3} + C_1x^2 + C_2x + C_3$

8. $y'' = xe^x, y(0) = 1; y'(0) = 0$ Отг. $y = xe^x - 2e^x + C_1x + C_2$, $y = e^x(x-2) + x + 3$

9. $y''' = \dfrac{\ln x}{x^2}, y(1) = 0; y'(1) = 1; y''(1) = 2$

Отг. $y = \dfrac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 - x\dfrac{\ln^2 x}{2}$, $y = \dfrac{3}{2}x^2 - 2x + \dfrac{1}{2} - x\dfrac{\ln^2 x}{2}$

10. $y'' = -\cos x$ Отг. $y = \cos x + C_1x + C_2$.

II. *Решете* уравненията:

1. $x^2y'' = y'^2$ Отг. $C_1^2y = C_1x - \ln(C_1x + 1) + C_2$; $y = C$; $y = \dfrac{x^2}{2} + C^2$

2. $y'' + y'\mathrm{tg}x = \sin 2x$ Отг. $y = C_1x - x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + C_2$

3. $xy'' - y' = e^x x^2$ Отг. $y = \dfrac{C_1x^2}{2} + xe^x - e^x + C_2$

4. $y'' + 2xy'^2 = 0$ Отг. $y = \dfrac{1}{2C_1}\ln\left|\dfrac{x - C_1}{x + C_1}\right| + C_2; y = C$

5. $xy'' - y' - x\sin\dfrac{y'}{x} = 0$ Отг. $C_1^2y = (C_1^2x + 1)\mathrm{arctg}C_1x - C_1x + C_2$; $2y = k\pi x^2 + C$

6. $xy'' = y'\ln\dfrac{y'}{x}$ Отг. $C_1^2y = C_1xe^{C_1x+1} - e^{C_1x+1} + C_2; y = \dfrac{ex^2}{2} + C$

7. $x^3y'' + x^2y' - 1 = 0$ Отг. $y = C_1\ln|x| + \dfrac{1}{x} + C_2$

8. $(1 - x^2)y'' + xy' - 2 = 0$

Отг. $y = \dfrac{C_1x}{2}\sqrt{x^2-1} - \dfrac{C_1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2-1}| + x^2 + C_2$; $y = C_1x\sqrt{1-x^2} + C_1\arcsin x + x^2 + C_2$

9. $(1 + e^x)y'' + y' = 0$ Отг. $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$

10. $y''' = 2(y'' - 1)\mathrm{cotg}x$ Отг. $y = x^2(C_1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\cos 2x + C_2x + C_3$
11. $y''x\ln x = y'$ Отг. $y = C_1x(\ln x - 1) + C_2$
12. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$ Отг. $y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}x + C_1\mathrm{arctg}x + C_2$
13. $y''\mathrm{tg}x = y' + 1$ Отг. $y = C_2 - C_1\cos x + x$
14. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$ Отг. $y = (1 - \frac{1}{C_1})\ln|1 + C_1x| + C_2.$

III. *Решете* уравненията:

1. $y'' - 2yy' = 0$ Отг. $y = C_1\mathrm{tg}x(C_1x + C_2)$
2. $2yy'' = 1 + y'^2$ Отг. $4C_1y = 4 + (C_1x + C_2)^2$
3. $yy'' + y'^3 = y'^2$ Отг. $y - C_1\ln y = x + C_2; \quad y = C$
4. $(2y + y')y'' = y'^2$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = 2C_1p - \ln p + C_2; \\ y = C_1p^2 - p; \\ y = C; y = Ce^{-x} \end{array} \right.$
5. $y^3 + y'' = 1$ Отг. $\frac{\sqrt{C_1y^2 + 1}}{C_1} = C_2 \pm x$
6. $yy'' - y'^2 - 1 = 0$ Отг. $C_1y + \sqrt{C_1^2y^2 - 1} = C_2x^{C_1}$
7. $y''(1 + yy') = y'(1 + y'^2)$
8. $y''y + y'^2 + yy' = 0.$

IV. *Решете* уравненията:

1. $y''(1 + 2\ln y') = 1$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = 2p\ln p - p + C_1; \\ y = p^2\ln p + C_2 \end{array} \right.$
2. $y''' - y''^2 = 0$ Отг. $\left| \begin{array}{l} y = C_3 + x(C_2 + 1) - (x + C_1)\ln|x + C_1| \\ y = C_1x + C_2 \end{array} \right.$
3. $y'y''' - 3y''^2 = 0$ Отг. $\left| \begin{array}{l} x = C_1y^2 + C_2y + C_3 \\ y = C; \quad y = C_1x + C_2 \end{array} \right.$
4. $y''' - y''^3 = 0$ Отг. $\frac{1}{3}(C_1 - 2x)^{\frac{3}{2}} + C_2x + C_3$

V. *Решете* уравненията:

1. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$ Отг. $y\cos^2(C_1 + x) = C_2$
2. $y'' = y'(\frac{y'}{y} - 2\sqrt{\frac{y'}{y} - 4})$ Отг. $\ln|C_2y| = 2\mathrm{tg}(2x + C_1)$
3. $xyy'' + xy'^2 = 3yy'$ Отг. $y^2 = C_1x^4 + C_2$
4. $x^2yy'' - (xy' - y)^2 = 0$ Отг. $y = C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}.$

ГЛАВА 7

ЛИНЕЙНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ПРОИЗВОЛЕН РЕД. СВОЙСТВА И ОБЩО РЕШЕНИЕ НА ЛИНЕЙНО ХОМОГЕННО ДИФЕРЕНЦИАЛНО УРАВНЕНИЕ

А. Линейни диференциални уравнения от произволен ред

Дефиниция 1 *Уравнение от вида:*

$$A_0(x)y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}(x)y' + A_n(x)y = f(x), \quad (7.1)$$

където $A_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ са коефициенти, $x \in [a,b], A_0(x) \neq 0, f(x) \neq 0$ и $A_0(x), f(x) \in C[a,b]$ се нарича ***линейно нехомогенно диференциално уравнение от n-ти ред.***

Задача на Коши: *Да се намери функция $y = y(x)$, която удовлетворява уравнението (7.1) при начални условия*

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad (7.2)$$

където $x_0 \in [a,b]$, а $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ са const.

Теорема 1 *Ако $A_i(x), f(x) \in C[a,b], i = \overline{1,n}$, задачата на Коши за уравнението (7.1) при начални условия (7.2) има* ***единствено*** *решение в интервала $[a,b]$.*

Ако означим лявата страна на (7.1) с $L(y)$, получаваме уравнението $L(y) = f(x)$. При $f(x) = 0$ уравнението е *линейно хомогенно диференциално от n-ти ред*, т.е.

$$L(y) = 0. \quad (7.3)$$

Дефиниция 2 *Операторът $L(y)$ се нарича* ***диференциален оператор****. Под действието на $L(y)$ функцията $y = \varphi(x)$ се трансформира в нова функция или $L(y)$ е изображение.*

Пример. Нека $L(y) = y'' + y$ и $y = e^x$. Тогава от $L(e^x) = (e^x)'' + e^x = e^x + e^x = 2e^x \Rightarrow L(y) : e^x \mapsto 2e^x$.

Дефиниция 3 *Операторът $L(y)$ се нарича* ***линеен диференциален****, ако са изпълнени условията:*

$$1^0. L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)].$$
$$2^0. L[cy(x)] = cL[y(x)], \quad c = const.$$

Б. Свойства на решенията на уравнението (7.3)

1. От $L[y_1(x)] \equiv 0$ и $L[y_2(x)] \equiv 0 \Rightarrow L[y_1(x) + y_2(x)] \equiv 0$.
2. От $L[y(x)] \equiv 0$ и $c = \text{const.} \Rightarrow L[cy(x)] \equiv 0$.
3. От $L[y(x)] \equiv 0$ и $y(x) = u(x) + iv(x)$ - комплекснозначна функция $\Longrightarrow L[u(x)] \equiv 0$ и $L[v(x)] \equiv 0$.

В. Линейна зависимост и независимост на функции. Детерминанта на Вронски

Дефиниция 4 *Казваме, че функциите $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), x \in [a,b]$ са* ***линейно зависими****, ако съществуват толкова на брой числа α_i, поне едно от тях различно от нула ($\alpha_i \neq 0$) така, че*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) = 0. \tag{7.4}$$

Дефиниция 5 *Функциите $y_i(x), i = \overline{1,n}$ са* ***линейно независими****, ако равенство (7.4) е изпълнено* ***само*** *когато $\alpha_i = 0, i = \overline{1,n}$.*

Дефиниция 6 *Ако $y_i(x) \in C^{(n-1)}[a,b], i = \overline{1,n}$, детерминантата $W(x)$ от (7.5) се нарича* ***детерминанта на Вронски****:*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \tag{7.5}$$

Теорема 2 *Ако функциите $y_i(x) \in C^{(n-1)}[a,b], i = \overline{1,n}$ и са линейно зависими в $[a,b]$, то $W(x) = 0$.*

Теорема 3 *Ако $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ са решения на (7.3) и*

а) има поне една точка $x_0 \in [a,b]$, така че $W(x_0) = 0$, функциите $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ са ***линейно зависими****;*

б) има поне една точка $x_0 \in [a,b]$, така че $W(x_0) \neq 0$, функциите $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ са ***линейно независими****.*

Следствие*. Ако $W(x_0) \neq 0, x_0 \in [a,b]$, то $W(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$.*

Дефиниция 7 *Ако $W(x) \neq 0$, т.е. функциите $y_i(x), i = \overline{1,n}$ са линейно независими, казваме че те образуват* ***фундаментална система решения на*** *(7.3).*

Г. Общо решение на уравнението (7.3)

Теорема 4 *(**за структурата на общото решение**). Всяко линейно хомогенно диференциално уравнение от n-ти ред има точно n линейно независими решения $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ и общото решение е:*

$$Y = y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x). \tag{7.6}$$

ГЛАВА 8

ЛИНЕЙНИ ХОМОГЕННИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННИ КОЕФИЦИЕНТИ И ПРИВОДИМИ КЪМ ТЯХ

А. Линейни хомогенни диференциални уравнения с постоянни коефициенти

Дефиниция 1 *Уравнение от вида:*

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \quad a_k \in \mathbb{R}, a_k = \overline{0,n}, n \in \mathbb{N} \quad (8.1)$$

*се нарича **линейно хомогенно диференциално уравнение с постоянни коефициенти от n–ти ред.***

Търсим решение на уравнението (8.1) от вида

$$y(x) = e^{rx}, \quad r \in \mathbb{R}. \quad (8.2)$$

Като заместим решението (8.2) в (8.1) получаваме:

$$e^{rx}(a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r + a_n) \equiv 0 \Leftrightarrow e^{rx}f(r) \equiv 0. \quad (8.3)$$

Дефиниция 2 *Многочленът* $f(r)$ *се нарича **характеристичен полином** на* (8.1), *а **характеристичното уравнение** на* (8.1) *е*

$$f(r) = 0. \quad (8.4)$$

И така, от $L(y) = 0 \Rightarrow L(e^{rx}) = e^{rx}f(r)$, т.е. ако r е корен на (8.4), $y(x) = e^{rx}$ е *частно решение* (частен интеграл) на (8.1).

Пример 8.1. Намерете *частните решения* на уравнението $y'' - y = 0$.

Решение. От характеристичното уравнение $r^2 - r^0 = 0 \Rightarrow r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 1$. Тогава частните решения са съответно $y_1(x) = e^x$ и $y_2(x) = e^{-x}$.

I случай. *Корените на (8.4) са реални и различни.* Ако $r_1, r_2, \ldots, r_n$ са корени на (8.4), при това $r_i \neq r_j, i \neq j, i, j = \overline{1,n}$, то съответните частни решения са $y_1(x) = e^{r_1x}, y_2(x) = e^{r_2x}, \ldots, y_n(x) = e^{r_nx}$, *а общият интеграл на (8.1) е*

$$Y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \cdots + C_ne^{r_nx}. \quad (8.5)$$

Може да се докаже, че детерминантата на Вронски $W(x) \neq 0$, т.е. $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ са линейно независими и образуват фундаментална система решения на (8.1).

Пример. Решете уравнението $y'' - 4y = 0$.

Решение. От характеристичното уравнение $r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2$ и тогава *общото решение* на уравнението е

$$Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

II случай. *Корените на (8.4) са реални, но между тях има многократни.* Нека r_1 е *μ-кратен корен* на (8.4), т.е. $f(r_1) = f'(r_1) = \cdots = f^{(\mu-1)}(r_1) = 0$, $f^{(\mu)}(r_1) \neq 0$ и тогава $f(r) = (r - r_1)^{\mu} q_{n-\mu}(r)$, $q_{n-\mu}(r_1) \neq 0$.

Теорема 1 *Ако r_1 е μ-кратен корен на (8.4), то $e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \ldots, x^{\mu-1} e^{r_1 x}$ са частни решения на (8.4), които образуват фундаментална система решения (линейно независими частни решения).*

При условието на Т1 част от общото решение на (8.1) е

$$Y_1 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} + \cdots + C_{\mu} x^{\mu-1} e^{r_1 x} = e^{r_1 x} P_{\mu-1}(x).$$

Частен случай. Нека $r_1, r_2, \ldots, r_k$ са съответно $\mu, \nu, \ldots, \delta$ - кратни корени на (8.4), като $\mu + \nu + \cdots + \delta = n$. Тогава *общото решение* на (8.1) е

$$Y = e^{r_1 x} P_{\mu-1}(x) + e^{r_2 x} P_{\nu-1}(x) + \cdots + e^{r_k x} P_{\delta-1}(x).$$

Пример 8.2. *Решете* уравненията

а) $y'' - 6y' + 9y = 0$ б) $y^{\text{IV}} - y'' = 0$

в) $y^{\text{IV}} + 2y''' + y'' = 0$ г) $y^{\text{V}} - 6y^{\text{IV}} + 9y''' = 0$

Решение.

а) Характеристичното уравнение на даденото диференциално уравнение е

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 3.$$

Тогава, според Теорема 1 *общото решение* е

$$Y = e^{3x}(C_1 x + C_2);$$

б) От характеристичното уравнение $r^4 - r^2 = 0 \Longleftrightarrow r^2(r-1)(r+1) = 0 \Longrightarrow r_{1,2} = 0$, $r_3 = 1$, $r_4 = -1$ и *общото решение* на уравнението е

$$Y = C_1 x + C_2 + C_3 e^{x} + C_4 e^{-x};$$

в) Даденото уравнение има характеристично уравнението $r^4 + 2r^3 + r^2 = 0 \Longleftrightarrow r^2(r+1)^2 = 0 \Longrightarrow r_{1,2} = 0$, $r_{3,4} = -1$. Следователно, *общото решение* е

$$Y = C_1 x + C_2 + e^{-x}(C_3 x + C_4);$$

г) Характеристичното уравнение е $r^5 - 6r^4 + 9r^3 = 0 \Longleftrightarrow r^3(r-3)^2 = 0 \Longrightarrow r_{1,2,3} = 0$, $r_{4,5} = 3$ и *общото решение* на диференциалното уравнение е

$$Y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3 + e^{3x}(C_4 x + C_5).$$

III случай. *Измежду корените на (8.4) има комплексна двойка.* Нека $r_1 = a + ib$ е еднократен корен на (8.4). Тогава $a - ib$ е също корен на (8.4). На двойката $a \pm ib$ отговарят съответно частни интеграли $y_1(x) = e^{ax}\cos bx$ и $y_2(x) = e^{ax}\sin bx$ и тогава част от общото решение на (8.1) е

$$Y_1 = C_1 e^{ax}\cos bx + C_2 e^{ax}\sin bx.$$

Ако $a \pm ib$ е μ-кратна двойка на (8.4), частните интеграли, които им съответстват са 2μ на брой и тогава част от общото решение на (8.1) е

$$Y_1 = e^{ax}\cos bx P_{\mu-1}(x) + e^{ax}\sin bx Q_{\mu-1}(x).$$

Пример 8.3. Намерете *общите решения* на уравненията:

$$\text{а) } y'' + 6y' + 13y = 0 \qquad \text{б) } y^{\text{IV}} + 2y'' + y = 0.$$

Решение.

а) От характеристичното уравнение $r^2 + 6r + 13 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -3 \pm 2i$, а *общото решение* на диференциалното уравнение е

$$Y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x);$$

б) Характеристичното уравнение е $r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (r^2+1)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = i;\, r_{3,4} = -i$. *Общото решение* е

$$Y = (C_1 x + C_2)\cos x + (C_3 x + C_4)\sin x.$$

Пример 8.4. Намерете *общите и частни решения* (при дадени начални условия) на уравненията:

$$\begin{aligned}
&\text{а) } y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0\\
&\text{б) } y^{\text{v}} + 8y''' + 16y' = 0\\
&\text{в) } y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1\\
&\text{г) } y''' - y' = 0, \quad y(0) = 3; \quad y'(0) = -1; \quad y''(0) = 1.
\end{aligned}$$

Решение.

а) Характеристичното уравнение на даденото диференциално уравнение е

$$r^3 - 5r^2 + 17r - 13 = 0 \Longrightarrow r_1 = 1, \quad r_{2,3} = 2 \pm 3i.$$

Общото решение е:

$$Y = C_1 e^x + e^{2x}(C_2\cos 3x + C_4\sin 3x);$$

б) От характеристичното уравнение $r^5+8r^3+16r=0 \Longleftrightarrow r(r^4+8r^2+16)=0 \Longleftrightarrow r(r^2+4)^2=0 \Longrightarrow r_1=0,\ r_{2,3}=2i,\ r_{4,5}=-2i$. *Общото решение* е:

$$Y = C_1 + (C_2x + C_3)\cos 2x + (C_4x + C_5)\sin 2x;$$

в) Характеристичното уравнение $r^2-5r+4=0$ има корени $r_1=1$ и $r_2=4$, а *общото решение* е

$$Y = C_1e^x + C_2e^{4x}.$$

От общото решение $y(0) = C_1e^0 + C_2e^0 = C_1 + C_2 = 1$. Диференцираме общото уравнение по x:

$$Y' = C_1e^x + 4C_2e^{4x} \Rightarrow y'(0) = C_1e^0 + 4C_2e^0 = C_1 + 4C_2 = 1.$$

От системата

$$\left|\begin{array}{l} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 4C_2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = 0. \end{array}\right.$$

Следователно търсеното *частно решение* е $y = e^x$ (след заместване на C_1 и C_2 с намерените стойности в общото решение).

г) От характеристичното уравнение $r^3 - r = 0 \Leftrightarrow r(r-1)(r+1) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_{2,3} = \pm 1$. Следователно *общото решение* е:

$$Y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^x.$$

Диференцираме по x:

$$Y' = -C_2e^{-x} + C_3e^x$$
$$Y'' = C_2e^{-x} + C_3e^x.$$

След заместване $x = 0, y = 3, y' = -1$ и $y'' = 1$ получаваме системата:

$$\left|\begin{array}{l} C_1 + C_2 + C_3 = 3 \\ -C_2 + C_3 = -1 \\ C_2 + C_3 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} C_1 = 2 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 0. \end{array}\right.$$

Следователно *частното решение* е:

$$y = 2 + e^{-x}.$$

Б. Ойлерово хомогенно диференциално уравнение

Дефиниция 3 *Уравнение от вида*

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}xy' + a_ny = 0, \tag{8.6}$$

където $a_i, i = \overline{0,n}$ са реални числа, се нарича ***хомогенно диференциално уравнение на Ойлер****.*

Задача. Особена точка за уравнението е $x = 0$. Нека $x > 0$. Посредством субституцията $x = e^t$ производните $y', y'', y''', \dots$ на $y(x)$ относно x да се заместят с производните $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}, \dots$ на $y(x)$ относно параметъра t, т.е. търсим решения надясно от особената точка.

От $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ и $\dot{x} = e^t \Rightarrow y' = e^{-t}\dot{y}$. Диференцираме $y' = e^{-t}\dot{y}$ по t (като се съобразим с това, че y зависи от t посредством x) и получаваме

$$y''\dot{x} = e^{-t}(\ddot{y} - \dot{y}) \Longleftrightarrow y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}).$$

Отново диференцираме по t последния резултат:

$$y'''\dot{x} = e^{-2t}(\dddot{y} - \ddot{y} - 2\ddot{y} + 2\dot{y}) \Longleftrightarrow y''' = e^{-3t}(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}) \quad \text{и т.н.}$$

Получените резултати заместваме в (8.6) и получаваме *линейно хомогенно диференциално уравнение с постоянни коефициенти.*

По-общо: Разглеждаме уравнение

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots$$
$$+ a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = 0, \qquad a \neq 0. \quad (8.7)$$

От $ax + b = 0$ получаваме особена точка $x = -\dfrac{b}{a}$ за диференциалното уравнение. Нека $ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$. Посредством субституцията $ax + b = e^t \Rightarrow x = \dfrac{e^t - b}{a}, \dot{x} = \dfrac{e^t}{a}$ намираме решения на (8.7) *надясно* от особената точка. Аналогично от $ax + b < 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{b}{a}$ и субституцията $ax + b = -e^t \Rightarrow x = -\dfrac{e^t + b}{a}, \dot{x} = -\dfrac{e^t}{a}$ търсим решения на (8.7) *наляво* от особената точка.

Пример 8.5. *Решете* диференциалните уравнения *Ойлер*:

а) $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$

б) $x^3y''' + xy'' - y' = 0$

в) $(3x+1)^2y'' - 2(3x+1)y' + 6y = 0.$

Решение.

а) Полагаме $x = e^t \Rightarrow \dot{x} = e^t$. От $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dot{y}e^{-t}$, $y'' = \dfrac{(\dot{y})'_t}{\dot{x}} = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$. Заместваме в уравнението:

$$e^{2t}e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) - 9e^t e^{-t}\dot{y} + 21y = 0$$
$$\ddot{y} - 10\dot{y} + 21y = 0.$$

Характеристичното уравнение на полученото хомогенно диференциално уравнение с постоянни коефициенти е $r^2 - 10r + 21 = 0$ с корени $r_1 = 3, r_2 = 7$. *Общото решение* е $Y(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{7t} \Rightarrow Y(x) = C_1x^3 + C_2x^7$.

б) Аналогично от $x = e^t \Rightarrow \dot{x} = e^t \Rightarrow y' = e^{-t}\dot{y}$; $y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$, $y''' = e^{-3t}(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y})$. След заместване в даденото уравнение:

$$e^{3t}e^{-3t}(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}) + e^te^{-t}\dot{y} - y = 0,$$

получаваме $\dddot{y} - 3\ddot{y} + 3\dot{y} - y = 0$. Характеристичното уравнение е $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^3 = 0 \Rightarrow r_{1,2,3} = 1$.

$$\Rightarrow Y(t) = e^t(C_1t^2 + C_2t + C_3).$$

От $x = e^t \Rightarrow t = \ln|x| \Rightarrow Y(x) = x(C_1\ln^2|x| + C_2\ln|x| + C_3)$;

в) Полагаме $3x + 1 = e^t \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}(e^t - 1) \Rightarrow \dot{x} = \dfrac{1}{3}e^t$, $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3\dot{y}e^{-t}$,
$y'' = \dfrac{(\dot{y})'_t}{\dot{x}} = 3\dfrac{(\ddot{y} - \dot{y})e^{-t}}{\frac{1}{3}e^t} = 9e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$.

$$\Rightarrow e^{2t}9e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) - 2e^t3\dot{y}e^{-t} + 6y = 0 \Rightarrow 9\ddot{y} - 15\dot{y} + 6y = 0 \Rightarrow 3\ddot{y} - 5\dot{y} + 2y = 0.$$

Характеристичното уравнение $3r^2 - 5r + 2 = 0$ има корени $r_1 = \dfrac{2}{3}, r_2 = 1$.

Следователно, $Y(t) = C_1e^{\frac{2}{3}t} + C_2e^t \Rightarrow Y(x) = C_1(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C_2(3x+1)$.

ЗАДАЧИ

I. Решете *линейните хомогенни* диференциални уравнения от n-ти ред с постоянни коефициенти:

1. $y'' - 2y' - 2y = 0$ Отг. $Y = C_1e^{(1-\sqrt{3})x} + C_2e^{(1+\sqrt{3})x}$
2. $3y'' - 2y' - 8y = 0$ Отг. $Y = C_1e^{-\frac{4x}{3}} + C_2e^{2x}$
3. $4y'' + 4y' + y = 0$ Отг. $Y = e^{\frac{x}{2}}(C_1x + C_2)$
4. $y^{\text{IV}} + 2y''' + y'' = 0$ Отг. $Y = C_1x + C_2 + e^{-x}(C_3x + C_4)$
5. $y^{\text{IV}} - 8y'' + 16y = 0$ Отг. $Y = e^{-2x}(C_1x + C_2) + e^{2x}(C_3x + C_4)$
6. $y^{\text{VI}} + 2y^{\text{V}} + y^{\text{IV}} = 0$ Отг. $Y = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 + (C_5x + C_6)e^{-x}$
7. $y''' - y'' - y' + y = 0$ Отг. $Y = (C_1x + C_2)e^x + C_3e^{-x}$
8. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$ Отг. $Y = (C_1x^2 + C_2x + C_3)e^{2x}$
9. $4y'' - 8y' + 5y = 0$ Отг. $Y = e^x(C_1\cos\dfrac{x}{2} + C_2\sin\dfrac{x}{2})$
10. $y^{\text{V}} - 5y^{\text{IV}} + 12y''' - 16y'' + 12y' - 4y = 0$
Отг. $Y = C_1e^x + (C_2x + C_3)\cos x + (C_4x + C_5)\sin x$
11. $y^{\text{VI}} - 2y^{\text{V}} + 3y^{\text{IV}} - 4y''' + 3y'' - 2y' + y = 0$
Отг. $Y = (C_1x + C_2)e^x + (C_3x + C_4)\cos x + (C_5x + C_6)\sin x$.

II. Намерете *общите и частни решения*(при дадени начални условия) на уравненията:

1. $y'' - 2y' + y = 0; y(2) = 1, y'(2) = 2$ Отг. $Y = (C_1 x + C_2)e^x$, $y = (7 - 3x)e^{x-2}$
2. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0; y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$ Отг. $Y = (C_1 x^2 + C_2 x + C_3)e^x$, $y = (1 + x)e^x$
3. $y'' + 4y' + 5y = 0; y(0) = -3, y'(0) = 0$ Отг. $Y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$, $y = -3e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)$
4. $y'' + y = 0; y(0) = 0, y'(\pi) = 1$ Отг. $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $y = \cos x.$

III. Намерете *интегралната крива* на диференциалното уравнение, която се допира до правата g в точка M_0:

1. $y'' - y = 0; g \equiv y = x; M_0(0, 0)$ Отг. $y = \mathrm{sh} x$
2. $y'' - 4y' + 3y = 0; g \equiv 2x - 2y + 9 = 0; M_0(0, 2)$ Отг. $y = \frac{1}{2}(5e^x - e^{3x})$.

IV *Решете* диференциалните уравнения на *Ойлер*:

1. $x^2 y'' + xy' + y = 0$ Отг. $y = C_1 \cos \ln|x| + C_2 \sin \ln|x|$
2. $x^2 y''' - 3xy'' + 3y' = 0$ Отг. $y = C_1 + C_2 x^2 + C_3 x^4$
3. $x^2 y''' - 2y' = 0$ Отг. $y = C_1 + C_2 \ln|x| + C_3 x^3$
4. $(2x+1)^2 y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0$ Отг. $y = (2x+1)(C_1 + C_2 \ln|2x+1|)$
5. $(3x+2)^2 y'' + 7(3x+2)y = 0$ Отг. $Y = C_1 + C_2(3x+2)^{-\frac{4}{3}}$
6. $(2x+1)^2 y'' - 2(2x+1)y' - 12y = 0$ Отг. $Y = C_1(2x+1)^3 + \dfrac{C_2}{2x+1}$
7. $(5+x)^2 y'' - 3(5+x)y' + 4y = 0$ Отг. $Y = (5+x)^2(C_1 + C_2 \ln|5+x|)$
8. $x^3 y''' - 6x^2 y'' + 18xy' - 24y = 0$ Отг. $Y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + C_3 x^4$
9. $x^4 y^{\mathrm{IV}} - x^3 y''' + 3x^2 y'' - 6xy' + 6y = 0$
   Отг. $Y = C_1 x + C_2 x \ln|x| + C_3 x^2 + C_4 x^4$.

ГЛАВА 9

ЛИНЕЙНИ НЕХОМОГЕННИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ПРОИЗВОЛЕН РЕД – ОБЩО РЕШЕНИЕ. МЕТОД НА ЛАГРАНЖ

А. Линейни нехомогенни диференциални уравнения от произволен ред – общо решение

Разглеждаме *уравнението*

$$L(y) = A_0(x)y^{(n)} + A_1(x)y^{(n+1)} + \cdots + A_{n-1}(x)y' + A_n(x)y = f(x), \tag{9.1}$$

където $L(y)$ е познатият линеен оператор от гл. 8, $A_0(x) \neq 0$.

Съответното *хомогенно уравнение* на (9.1) е

$$L(y) = 0. \tag{9.2}$$

Ако $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ са частни решения на (9.2), които образуват фундаментална система $(W(x) \neq 0)$, *общото решение на* (9.2) е

$$Y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x). \tag{9.3}$$

Теорема 1 *Ако $\eta(x)$ е частно решение на (9.1), т.е. $L[\eta(x)] \equiv f(x)$, общото решение на (9.1) се получава по формулата*

$$y(x) = Y + \eta(x). \tag{9.4}$$

Теорема 2 *Ако $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$ и образуваме уравненията $L(y) = f_1(x), L(y) = f_2(x)$, при това $L[\eta_1(x)] \equiv f_1(x), L[\eta_2(x)] \equiv f_2(x)$, то $\eta(x) = \eta_1(x) + \eta_2(x)$.*

Теорема 3 *Ако $L(y) = f(x) = u(x) + iv(x)$ и $L[\eta_1(x)] \equiv u(x), L[\eta_2(x)] \equiv v(x)$, то $L[\eta_1(x) + i\eta_2(x)] \equiv f(x)$.*

Б. Метод на Лагранж за намиране частно решение $\eta(x)$ на (9.1)

а) *вид на $\eta(x)$* – във формула (9.3) вместо константите $C_1, C_2, \ldots, C_n$ поставяме непознатите функции $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$, а вместо $Y \to \eta(x)$, т.е.

$$\eta(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x). \tag{9.5}$$

б) *система на Лагранж* - във формула (9.3) вместо константите $C_1, C_2, \ldots,$ C_n поставяме $u_1'(x), u_2'(x), \ldots, u_n'(x)$, а вместо $Y \to 0$, с изключение на последното уравнение на системата, където пишем $\dfrac{f(x)}{A_0(x)}$, а частните решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ последователно диференцираме, т.е.

$$\left| \begin{array}{l} u_1'y_1 + u_2'y_2 + \cdots + u_n'y_n = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' + \cdots + u_n'y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1'y_1^{(n-2)} + u_2'y_2^{(n-2)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-2)} = 0 \\ u_1'y_1^{(n-1)} + u_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{A_0(x)}. \end{array} \right. \tag{9.6}$$

Получихме нехомогенна система от тип $(n \times n)$ относно $u_1', u_2', \ldots, u_n'$, чиято детерминанта $\Delta(x) = W(x) \neq 0(y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуват фундаментална система частни решения на (9.2)) и тогава (по Крамер)

$$u_k' = \frac{\Delta_k}{W(x)} \Leftrightarrow u_k = \int \frac{\Delta_k}{W(x)} \mathrm{d}x, \quad k = \overline{1, n}. \tag{9.7}$$

От (9.3), (9.4), (9.5) и (9.7) получаваме *общото решение* на (9.1):

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + \sum_{k=1}^{n} \Big[\int \frac{\Delta_k}{W(x)} \mathrm{d}x \Big] y_k(x). \tag{9.8}$$

Пример 9.1. Решете диференциалните уравнения

а) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$

б) $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

в) $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$.

Решение. а) 1. Решаваме *съответното хомогенно уравнение* $y'' + y = 0$, чието характеристично уравнение $r^2 + 1 = 0$ има корени $r_{1,2} = \pm i$. На корените $r_{1,2} = \pm i$ съответстват частни интеграли $y_1(x) = e^{0x}\cos x$ и $y_2(x) = e^{0x}\sin x$ и по формула (9.3) намираме решението на хомогенното уравнение

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{9.9}$$

2. Решението на *даденото нехомогенно уравнение* търсим по формулата $y(x) = Y + \eta(x)$, където $\eta(x)$ е частно решение на а).

* *вид на* $\eta(x)$ - в (1) вместо константите C_1 и C_2 поставяме непознати функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$, а вместо $Y \to \eta(x)$:

$$\eta(x) = u_1(x)\cos x + u_2(x)\sin x. \tag{9.10}$$

* *система на Лагранж*, посредством която намираме непознатите функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ - в (9.9) вместо константите C_1 и C_2 поставяме $u_1'(x)$ и $u_2'(x)$, а вместо $Y \to 0$, с изключение на последното уравнение, където пишем $\frac{1}{\cos x}$, а частните интеграли $\cos x$ и $\sin x$ последователно диференцираме:

$$\begin{array}{rl|l|l} u_1'\cos x + u_2'\sin x = 0 & & .\sin x & \\ -u_1'\sin x + u_2'\cos x = \dfrac{1}{\cos x} & & & + \end{array}$$

От $u_2' = 1 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} = 1 \Rightarrow \int \mathrm{d}u_2 = \int \mathrm{d}x \Rightarrow u_2(x) = x.$

От $u_2' = 1 \Rightarrow u_1' = -\dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \int \mathrm{d}u_1 = \int \dfrac{\mathrm{d}\cos x}{cosx} \Rightarrow u_1(x) = \ln|\cos x|.$

$$\Longrightarrow \eta(x) = \cos x \ln|\cos x| + x\sin x. \tag{9.11}$$

Общото решение на уравнението намираме от формули (9.4), (9.9), (9.10):

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln|\cos x| + x\sin x.$$

б) 1. Съответното *хомогенно* уравнение $y''' + y' = 0$ има характеристично уравнение $r^3 + r = 0$. На корените му $r_1 = 0, r_{2,3} = \pm i$ съответстват частни интеграли $y_1(x) = e^{0x}, y_2(x) = e^{0x}\cos x, y_3(x) = e^{ox}\sin x$ и по формула (9.3) получаваме

$$Y = C_1 1 + C_2\cos x + C_3\sin x. \tag{9.12}$$

2. По формулата $y(x) = Y + \eta(x)$, където $\eta(x)$ е частно решение на даденото уравнение, търсим решението на б).

* *вид на* $\eta(x)$ - в (1) вместо константите C_1, C_2 и C_3 поставяме непознати фукции $u_1(x), u_2(x)$ и $u_3(x)$, а вместо $Y \to \eta(x)$:

$$\eta(x) = u_1(x)1 + u_2(x)\cos x + u_3(x)\sin x. \tag{9.13}$$

**система на Лагранж* (вж. а) 2.):

$$\left|\begin{array}{l} u_1'1 + u_2'\cos x + u_3'\sin x = 0 \\ u_1'0 - u_2'\sin x + u_3'\cos x = 0 \\ u_1'0 - u_2'\cos x - u_3'\sin x = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}. \end{array}\right. \tag{9.14}$$

$$\text{От} \left|\begin{array}{l} -u_2'\sin x + u_3'\cos x = 0 \longrightarrow u_2' = u_3'\dfrac{\cos x}{\sin x} \\ -u_2'\cos^3 x - u_3'\sin x\cos^2 x = \sin x \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow -u_3'\frac{\cos^4 x}{\sin x} - u_3'\sin x\cos^2 x = \sin x \Longrightarrow u_3' = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\Longrightarrow \int \mathrm{d}u_3 = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \Longrightarrow u_3(x) = x - \mathrm{tg}x.$$

От $u_2' = -\dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \displaystyle\int du_2 = \int \frac{d\cos x}{\cos x} \Rightarrow u_2(x) = \ln|\cos x|$.

От първото уравнение на (9.14) намираме

$$u_1' = \sin x \Longrightarrow \int du_1 = \int \sin x dx \Longrightarrow u_1(x) = -\cos x.$$

$$\Longrightarrow \eta(x) = \sin x + \cos x \ln|\cos x| + (x - \mathrm{tg}x)\sin x. \tag{9.15}$$

Общото решение на даденото уравнение по формула (9.4) е

$$y(x) = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x - \cos x + \cos x \ln|\cos x| + \sin x(x - \mathrm{tg}x).$$

в) 1. Решаваме съответното *хомогенно уравнение* $y'' - y' = 0$ с характеристично уравнение $r^2 - r = 0$. На корените $r_1 = 0, r_2 = 1$ съответстват частни интеграли $y_1(x) = e^{0x} = 1$ и $y_2(x) = e^x$ и по формула (9.3) имаме

$$Y = C_1 1 + C_2 e^x. \tag{9.16}$$

2. Решението на *даденото нехомогенно уравнение* намираме по формулата $y(x) = Y + \eta(x)$, където $\eta(x)$ е частно решение на в).
* *вид на* $\eta(x)$ - от (9.16), вж. а)

$$\eta(x) = u_1(x)1 + u_2(x)e^x. \tag{9.17}$$

* *система на Лагранж* - от (9.16), вж. а)

$$\left| \begin{array}{l} u_1' 1 + u_2' e^x = 0 \\ u_1' 0 + u_2' e^x = e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}} \end{array} \right. .$$

От $u_2' = e^x\sqrt{1 - e^{2x}} \Rightarrow u_2(x) = \displaystyle\int e^x\sqrt{1 - e^{2x}}\, dx = I(x)$.

Полагаме $e^x = z \Rightarrow de^x = dz \Rightarrow e^x dx = dz \Rightarrow dx = \frac{dz}{z}$. Тогава

$$I(z) = \int z\sqrt{1 - z^2}\frac{dz}{z} = z\sqrt{1 - z^2} - \int z\frac{-2z}{2\sqrt{1 - z^2}}dz$$
$$= A - \int \frac{1 - z^2 - 1}{\sqrt{1 - z^2}}dz = A - \int\sqrt{1 - z^2}\, dz + \int\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

$$2I(z) = A + \arcsin z \Longrightarrow u_2(x) = I(x) = \frac{1}{2}[e^x\sqrt{1 - e^{2x}} + \arcsin e^x].$$

От $u_1' = -e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$

$$\Longrightarrow \int du_1 = \frac{1}{2}\int (1 - e^{2x})^{\frac{1}{2}} d(1 - e^{2x}) \Rightarrow u_1(x) = \frac{1}{3}(1 - e^{2x})^{\frac{3}{2}}.$$

$$\Longrightarrow \eta(x) = \frac{1}{3}(1 - e^{2x})^{\frac{3}{2}} + \frac{e^x}{2}[e^x\sqrt{1 - e^{2x}} + \arcsin e^x]. \tag{9.18}$$

Общият интеграл на даденото уравнение е

$$y(x) = C_1 + C_2e^x + \frac{1}{3}(1-e^{2x})^{\frac{3}{2}} + \frac{e^x}{2}[e^x\sqrt{1-e^{2x}} + \arcsin e^x].$$

ЗАДАЧИ

Решете диференциалните уравнения:

1. $y'' + y = \mathrm{tg}x$ Отг. $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \cos x\ln|\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})|$
2. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$ Отг. $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x|$
3. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x+1}$ Отг. $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x+1)$
4. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$ Отг. $y(x) = (C_1 + C_2x + \sqrt{4-x^2} + x\arcsin\frac{x}{2})e^x$
5. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ Отг. $y(x) = (C_1 - \ln|\sin x|)\cos 2x + (C_2 - x - \frac{1}{2}\mathrm{ctg}x)\sin 2x$
6. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$ Отг. $y(x) = (C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2)e^{-2x}$
7. $y''' + y' = \mathrm{tg}x$ Отг. $y(x) = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x - \ln|\cos x| - \sin x\ln\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})$
8. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$ Отг. $y(x) = (C_1 - \frac{x}{2})\cos 2x + (C_2 + \frac{1}{4}\ln|\sin 2x|)\sin 2x$
9. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$ Отг. $y(x) = [(C_1 + \ln|\cos x|)\cos x + (C_2 + x)\sin x]e^{2x}$
10. $y'' + y' = \dfrac{1}{1+e^x}$ Отг. $y(x) = C_1 + C_2e^{-x} - (1+e^{-x})\ln(1+e^x) + x$
11. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$ Отг. $y(x) = e^{-2x}(C_1 + C_2x + \frac{1}{2x})$.

ГЛАВА 10

ЧАСТНИ РЕШЕНИЯ НА ЛИНЕЙНИ НЕХОМОГЕННИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННИ КОЕФИЦИЕНТИ И С ДЯСНА ЧАСТ ОТ ОПРЕДЕЛЕН ВИД

Разглеждаме **нехомогенно** диференциално уравнение

$$L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{10.1}$$

където $L(y)$ е линеен оператор, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0, n}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_0 \neq 0$.

Съответното *хомогенно* уравнение на (10.1), неговото *характеристично* уравнение и *общото решение* на (10.1) са съответно:

$$L(y) = 0, \tag{10.2}$$

$$f(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0, \tag{10.3}$$

$$y(x) = Y + \eta(x), \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x), \tag{10.4}$$

където Y е общото решение на (10.2), а $\eta(x)$ е часно решение на (10.1).

I случай. $f(x) = e^{kx} P_m(x)$, където $k \in \mathbb{R}$, а $P_m(x)$ е известен полином с реални коефициенти от степен m.

Теорема 1 *Ако $f(x) = e^{kx} P_m(x)$, то $\eta(x) = e^{kx} x^{\mu} Q_m(x)$, където μ е кратност на k като корен на характеристичното уравнение, а $Q_m(x)$ е непознат полином от степен m.*

Коефициентите на $Q_m(x)$ се намират по метода на неопределените коефициенти.

II случай. $f(x) = e^{\alpha x}[P_{m_1}(x) \cos \beta x + P_{m_2}(x) \sin \beta x]$, където $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а $P_{m_1}(x)$ и $P_{m_2}(x)$ са известни полиноми с реални коефициенти от степен съответно m_1 и m_2.

Теорема 2 *Ако $f(x) = e^{\alpha x}[P_{m_1}(x) \cos \beta x + P_{m_2}(x) \sin \beta x]$, то*

$$\eta(x) = e^{\alpha x} x^{\mu} [P_m(x) \cos \beta x + P_m^*(x) \sin \beta x],$$

където μ е кратност на $\alpha \pm i\beta$ като корен на характеристичното уравнение, а $P_m(x)$ и $P_m^*(x)$ са непознати полиноми от степен m, като $m = \max(m_1, m_2)$.

Пример 10.1. *Решете* диференциалните уравнения

а) $y'' + 4y = x^2 + x\sin 3x$ б) $y''' - 4y' = xe^{2x} + \sin x$

в) $y'' - 2y' + 2y = e^x(\sin x + 2\cos x)$ г) $y^{\text{IV}} - 4y''' + 5y'' = e^{2x}x\sin x + xe^{-x} + x^2$

Решение. а) 1. Решаваме *съответното хомогенно уравнение:* $y'' + 4y = 0$ $\Longrightarrow r^2 + 4 = 0 \Longrightarrow r_{1,2} = \pm 2i = 0 \pm 2i$ $(a = 0,\ b = 2)$. Тогава $Y = C_1e^{0x}\cos 2x + C_2e^{0x}\sin 2x$ или

$$Y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

2. Решението на *даденото нехомогенно уравнение* търсим по формулата $y(x) = Y + \eta_1(x) + \eta_2(x)$, където $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ са частни решения съответно на диференциалните уравнения $y'' + 4y = x^2$ и $y'' + 4y = x\sin 3x$.

2_1. $y'' + 4y = x^2 = e^{0x}P_2(x)$, (вж. I случай, Т1).

От $k = 0 \neq r_{1,2}$ и $m = 2 \Longrightarrow \mu = 0$ и тогава $\eta_1(x) = e^{0x}x^0(ax^2 + bx + c)$.

$$\begin{array}{r|l} 4. & \eta_1(x) = ax^2 + bx + c \\ + \quad & \eta_1'(x) = 2ax + b \\ 1. & \eta_1''(x) = 2a \end{array}$$

От $\eta_1'' + 4\eta_1 \equiv x^2 \Longrightarrow 4ax^2 + 4bx + 4c + 2a \equiv 1x^2 + 0x + 0$

$$\left|\begin{array}{l} 4a = 1 \\ 4b = 0 \\ 4c + 2a = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} a = \frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{8} \end{array}\right. , \qquad \Longrightarrow \eta_1(x) = \frac{1}{8}(2x^2 - 1).$$

2_2. $y'' + 4y = x\sin 3x = e^{0x}(0\cos 3x + x\sin 3x)$, (вж. II случай, Т2).

- От $m_1 = 0$, $m_2 = 1 \Longrightarrow \max(m_1, m_2) = \max(0, 1) = 1 = m$ и тогава $P_m(x) = Ax + B$, $P_m^*(x) = Cx + D$.
- От $\alpha = 0, \beta = 3 \Longrightarrow \alpha \pm i\beta = \pm 3i \neq r_{1,2} \Longrightarrow \mu = 0$. Тогава $\eta_2(x) = e^{0x}x^0[(Ax + B)\cos 3x + (Cx + D)\sin 3x]$.

$$\begin{array}{r|l} 4. & \eta_2(x) = (Ax + B)\cos 3x + (Cx + D)\sin 3x \\ + \quad & \eta_2'(x) = A\cos 3x - 3(Ax + B)\sin 3x + C\sin 3x + 3(Cx + D)\cos 3x \\ 1. & \eta_2''(x) = -6A\sin 3x - 9(Ax + B)\cos 3x + 6C\cos 3x - 9(Cx + D)\sin 3x \end{array}$$

От $\eta_2'' + 4\eta_2 \equiv x\sin 3x \Longrightarrow$

$$[-5(Ax + B) + 6C]\cos 3x + [-5(Cx + D) - 6A]\sin 3x \equiv 0\cos 3x + x\sin 3x.$$

$$\left|\begin{array}{l} -5Ax - 5B + 6C = 0x + 0 \\ -5Cx - 6A - 5D = 1x + 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} -5A = 0 \\ -5B + 6C = 0 \\ -5C = 1 \\ -6A - 5D = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} A = 0 \\ B = -\frac{6}{25} \\ C = -\frac{1}{5} \\ D = 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \eta_2(x) = -\frac{1}{5}x\sin 3x - \frac{6}{25}\cos 3x.$$

И така, *общият интеграл* на уравнението е

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{8}(2x^2 - 1) - \frac{1}{5} x \sin 3x - \frac{6}{25} \cos 3x.$$

б) 1. Решаваме *съответното хомогенно уравнение*: $y''' - 4y' = 0 \Longrightarrow r^3 - 4r = 0 \Longrightarrow r_1 = 0$, $r_{2,3} = \pm 2$. Тогава $Y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$.

2. Решението на *даденото нехомогенно уравнение* намираме по формулата $y(x) = Y + \eta_1(x) + \eta_2(x)$, вж. а).

2_1. $y''' - 4y' = e^{2x} x = e^{2x} P_1(x)$ (вж. Т1).

От $k = 2 = r_2$ и $m = 1 \Longrightarrow \mu = 1$ и тогава $\eta_1(x) = e^{2x} x(ax + b)$.

$$\begin{array}{rl} & \eta_1(x) = e^{2x}(ax^2 + bx) \\ (-4). & \eta_1'(x) = e^{2x}(2ax^2 + 2bx + 2ax + b) \\ + & \eta_1''(x) = e^{2x}(4ax^2 + 4bx + 8ax + 4b + 2a) \\ 1. & \eta_1'''(x) = e^{2x}(8ax^2 + 8bx + 24ax + 12a + 12b) \end{array}$$

От $\eta''' - 4\eta_1' \equiv xe^{2x} \Longrightarrow e^{2x}(16ax + 12a + 8b) \equiv e^{2x}(1x + 0)$.

$$\left| \begin{array}{l} 16a = 1 \\ 12a + 8b = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = \dfrac{1}{16} \\ b = -\dfrac{3}{32} \end{array} \right. \Longrightarrow \eta_1(x) = \frac{xe^{2x}}{32}(2x - 3).$$

2_2. $y''' - 4y' = \sin x = e^{0x}(0 \cos x + 1 \sin x)$, (вж. Т2).

- От $m_1 = m_2 = 0 \Longrightarrow \max(0, 0) = 0 = m$ и тогава $P_m(x) = A$, $P_m^*(x) = B$.
- От $\alpha = 0$, $\beta = 1 \Longrightarrow \alpha \pm i\beta = \pm i \neq r_{1,2,3} \Longrightarrow \mu = 0$.

Тогава $\eta_2(x) = e^{0x} x^0 (A \cos x + B \sin x)$.

$$\begin{array}{rl} & \eta_2(x) = A \cos x + B \sin x \\ (-4). & \eta_2'(x) = -A \sin x + B \cos x \\ + & \eta_2''(x) = -A \cos x - B \sin x \\ 1. & \eta_2'''(x) = A \sin x - B \cos x. \end{array}$$

От $\eta_2''' - 4\eta_2' \equiv \sin x \Longrightarrow 5A \sin x - 5B \cos x \equiv 1 \sin x + 0 \cos x$

$$\left| \begin{array}{l} 5A = 1 \\ -5B = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} A = \dfrac{1}{5} \\ B = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \eta_2 = \frac{1}{5} \cos x.$$

Общият интеграл на уравнението е

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + \frac{xe^{2x}}{32}(2x - 3) + \frac{1}{5} \cos x.$$

в) 1. Решаваме *съответното хомогенно уравнение*: $y'' - 2y' + 2y = 0 \Longrightarrow r^2 - 2r + 2 = 0 \Longrightarrow r_{1,2} = 1 \pm i$ $(a = 1, b = 1)$. Тогава $Y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$.

2. Решението на *даденото нехомогенно уравнение* намираме по формулата $y(x) = Y + \eta(x)$, където $\eta(x)$ е частно решение на даденото уравнение.

$$y'' - 2y' + 2y = e^{1x}(1\sin x + 2\cos x), \quad \text{(вж. Т2)}.$$

• От $m_1 = m_2 = 0 \Longrightarrow \max(m_1, m_2) = \max(0,0) = 0 = m$ и тогава $P_m(x) = A$, $P^*_m(x) = B$.

• От $\alpha = \beta = 1 \Longrightarrow \alpha \pm i\beta = 1 \pm i = r_{1,2} \Longrightarrow \mu = 1$.

Тогава $\eta(x) = e^x x(A\cos x + B\sin x)$.

$$\begin{array}{r|l} 2. & \eta(x) = e^x(Ax\cos x + Bx\sin x) \\ +\ (\text{-}2). & \eta'(x) = e^x(Ax\cos x + Bx\sin x + A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x) \\ 1. & \eta_1''(x) = e^x(Ax\cos x + Bx\sin x + A\cos x - Ax\sin x + B\sin x \\ & \qquad +Bx\cos x + A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x - A\sin x \\ & \qquad -A\sin x - Ax\cos x + B\cos x + B\cos x - Bx\sin x) \\ & \quad = e^x(2Bx\cos x - 2Ax\sin x + 2A\cos x + 2B\cos x + 2B\sin x - 2A\sin x) \end{array}$$

От $\eta'' - 2\eta' + 2\eta \equiv e^x(\sin x + 2\cos x)$

$$\Longrightarrow e^x(2Ax\cos x + 2Bx\sin x - 2Ax\cos x - 2Bx\sin x - 2A\cos x + 2Ax\sin x - 2B\sin x$$
$$- 2Bx\cos x + 2Bx\cos x - 2Ax\sin x + 2A\cos x + 2B\cos x + 2B\sin x - 2A\sin x)$$
$$\equiv e^x(\sin x + 2\cos x).$$

$$\Longrightarrow -2A\sin x + 2B\cos x \equiv \sin x + 2\cos x$$

$$\left| \begin{array}{l} -2A = 1 \\ 2B = 2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} A = -\frac{1}{2} \\ B = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \eta(x) = \frac{1}{2}e^x x(2\sin x - \cos x).$$

Тогава $y(x) = C_1 e^x\cos x + C_2 e^x \sin x + \frac{1}{2}e^x x(2\sin x - \cos x)$.

г) 1. Решаваме *съответното хомогенно уравнение*: $y^{\text{IV}} - 4y''' + 5y'' = 0 \Longrightarrow r_{1,2} = 0$, $r_{3,4} = 2 \pm i$. Тогава

$$Y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x}\cos x + C_4 e^{2x}\sin x.$$

2. Решението на *даденото нехомогенно уравнение* търсим по формулата $y(x) = Y + \eta_1(x) + \eta_2(x) + \eta_3(x)$, вж. а).

2_1. $y^{\text{IV}} - 4y''' + 5y'' = e^{2x}x\cos x = e^{2x}(x\cos x + 0\sin x)$, вж. Т2.

• От $m_1 = 1$, $m_2 = 0 \Longrightarrow \max(1,0) = 1 = m$ и тогава $P_m(x) = Ax + B$, $P^*_m(x) = Cx + D$.

• От $\alpha = 2$, $\beta = 1 \Longrightarrow \alpha \pm i\beta = 2 \pm i = r_{3,4} \Longrightarrow \mu = 1$.

Тогава $\eta_1(x) = e^{2x}x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]$.

2_2. $y^{\text{IV}} - 4y''' + 5y' = e^{-x}x = e^{-x}P_1(x)$, вж. Т1.

От $k = 0 = r_{1,2,3,4} \Longrightarrow \mu = 0$ и тогава $\eta_2(x) = e^{-x}x^0(ax + b)$.

2_3. $y^{\text{IV}} - 4y''' + 5y' = x^2 = e^{0x}P_2(x)$, вж. Т1.

От $k = 0 = r_{1,2} \Longrightarrow \mu = 2$ и тогава $\eta_3(x) = e^{0x}x^2(mx^2 + nx + p)$.

Оставяме на читателя да определи константите в трите частни интеграла и да напише общото решение.

Пример 10.2. Решете *задачата на Коши* за диференциалните уравнения
а) $y'' + 3y' + 2y = e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$;
б) $y'' + y = 2\cos x$, $y(0) = y'(0) = 1$;
в) $y'' - 4y = \operatorname{sh} x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Решение. а) 1. Решаваме *съответното хомогенно диференциално уравнение*: $y'' + 3y' + 2y = 0$. Характеристичното уравнение $r^2 + 3r + 2 = 0$ има корени $r_1 = -1$, $r - 2 = -2$. Тогава общото решение на хомогенното диференциално уравнение е

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

2. Решението на *даденото нехомогенно диференциално уравнение* се дава с формулата $y(x) = Y + \eta(x)$, където $\eta(x)$ е частно решение на даденото уравнение.

От $y'' + 3y' + 2y = e^x 1 = e^{1x} P_0(x)$ имаме $k = 1 \neq r_{1,2}$, $m = 0 \Longrightarrow \mu = 0$. Следователно $\eta(x) = Ae^x$.

$$\begin{array}{rr|l} & 2. & \eta(x) = Ae^x \\ + & 3. & \eta'(x) = Ae^x \\ & 1. & \eta''(x) = Ae^x. \end{array}$$

От $\eta'' + 3\eta' + 2\eta \equiv e^x \Longrightarrow 6Ae^x \equiv e^x \Longrightarrow 6A = 1 \Longrightarrow A = \dfrac{1}{6}$, а търсеното частно решение е $\eta(x) = \dfrac{1}{6}e^x$.

И така, *общото решение* на даденото уравнение е

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}e^x,$$

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}e^x.$$

3. От *началните условия* $y(0) = 0$ и $y'(0) = 3$ намираме система уравнения за константите C_1 и C_2:

$$\left| \begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{6} = 0 \\ y'(0) = -C_1 - 2C_2 + \frac{1}{6} = 3 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} C_1 = \frac{5}{2} \\ C_2 = -\frac{8}{3}. \end{array} \right.$$

И така, конкретно решение на даденото уравнение (интегрална крива, която минава през точката $O(0,0)$) е

$$y(x) = \frac{5}{2}e^{-x} - \frac{8}{3}e^{-2x} + \frac{1}{6}e^x.$$

б) 1. Решаваме *съответно хомогенно диференциално уравнение*: $y'' + y = 0$ $\Longrightarrow r^2 + 1 = 0 \Longrightarrow r_{1,2} = \pm i$. Тогава

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

2. Решението на *даденото нехомогенно диференциално уравнение* се дава с формулата $y(x) = Y + \eta(x)$.

- От $y'' + y = 2\cos x = e^{0x}[2\cos x + 0\cos x]$ имаме $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $m_1 = m_2 = 0$.
- От $\max(m_1, m_2) = \max(0,0) = 0 = m \Longrightarrow P_m(x) = A$ и $P_m^*(x) = B$.
- От $\alpha = \pm i\beta = \pm i = r_{1,2} \Longrightarrow \mu = 1$. Тогава

$$\eta(x) = e^{0x}x[A\cos x + B\sin x].$$

$$\begin{array}{cc|l} & 1. & \eta(x) = Ax\cos x + Bx\sin x \\ + & & \eta'(x) = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x \\ & 1. & \eta''(x) = -A\sin x - A\sin x - Ax\cos x + B\cos x + B\cos x - Bx\sin x. \end{array}$$

От $\eta'' + \eta \equiv 2\cos x \Longrightarrow -2A\sin x + 2B\cos x \equiv 0\sin x + 2\cos x \Longrightarrow -2A = 0$, $2B = 2$, т.е. $A = 0$, $B = 1$. Частното решение е $\eta(x) = x\sin x$.

И така, *общото решение* на даденото уравнение е

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x,$$
$$y'(x) = -C_1\sin x + C_2\cos x + \sin x + x\cos x.$$

3. От *началните условия* $y(0) = y'(0) = 1$ намираме система уравнения за C_1 и C_2:

$$\left| \begin{array}{l} y(0) = C_1 = 1 \\ y'(0) = C_2 + 1. \end{array} \right.$$

И така, решение на даденото уравнение (интегрална крива, която минава през точката $M(0,1)$), е

$$y(x) = \cos x + (x+1)\sin x.$$

в) 1. Решаваме *съответното хомогенно диференциално уравнение*: $y'' - 4y = 0 \Longrightarrow r^2 - 4 = 0 \Longrightarrow r_{1,2} = \pm 2$. Тогава

$$Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

2. Решението на *даденото нехомогенно диференциално уравнение* се дава с формулата $y(x) = Y + \eta(x)$, където $\eta(x)$ е частно решение на даденото уравнение. Решението $\eta(x) = u_1(x)e^{2x} + u_2(x)e^{-2x}$ намираме чрез системата на Лагранж:

$$\left| \begin{array}{l} u_1' e^{2x} + u_2' e^{-2x} = 0 \\ 2u_1' e^{2x} - 2u_2' e^{-2x} = \operatorname{sh} x. \end{array} \right.$$

От първото уравнение на системата намираме $u_2' = -e^{4x}u_1'$. Като заместим във второто уравнение получаваме $2u_1'e^{2x} + 2u_1'e^{2x} = \operatorname{sh} x \Longrightarrow u_1' = \dfrac{1}{4}e^{-2x}\operatorname{sh} x$ и тогава намираме $u_2' = -\dfrac{1}{4}e^{2x}\operatorname{sh} x$.

От

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4}e^{-2x}\mathrm{sh}\,x \Longrightarrow \int \mathrm{d}u_1(x) = \frac{1}{4}\int e^{-2x}\mathrm{sh}\,x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}I_1$$

$$\Longrightarrow I_1 = \int e^{-2x}\mathrm{sh}\,x\mathrm{d}x = \int e^{-2x}\mathrm{dch}\,x = e^{-2x}\mathrm{ch}\,x + 2\int e^{-2x}\mathrm{ch}\,x\mathrm{d}x$$

$$= A + 2\int e^{-2x}\mathrm{dsh}\,x = A + 2e^{-2x}\mathrm{sh}\,x + 4\int e^{-2x}\mathrm{sh}\,x\mathrm{d}x = A + B + 4I_1.$$

От $3I_1 = -A - B \Longrightarrow I_1 = -\frac{1}{3}e^{-2x}(\mathrm{ch}\,x + 2\mathrm{sh}\,x)$ и тогава

$$u_1(x) = -\frac{1}{12}e^{-2x}(\mathrm{ch}\,x + 2\mathrm{sh}\,x).$$

Аналогично от

$$\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{4}e^{2x}\mathrm{sh}\,x \Longrightarrow \int \mathrm{d}u_2(x) = -\frac{1}{4}\int e^{2x}\mathrm{sh}\,x\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}I_2$$

$$\Longrightarrow I_2 = \int e^{2x}\mathrm{sh}\,x\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}e^{2x}(\mathrm{ch}\,x - 2\mathrm{sh}\,x),$$

а $u_2(x) = \frac{1}{12}e^{2x}(\mathrm{ch}\,x - 2\mathrm{sh}\,x)$.

$$\Longrightarrow \eta(x) = -\frac{1}{12}(\mathrm{ch}\,x + 2\mathrm{sh}\,x) + \frac{1}{12}(\mathrm{ch}\,x - 2\mathrm{sh}\,x) = -\frac{1}{3}\mathrm{sh}\,x.$$

Общото решение на даденото уравнение е

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - \frac{1}{3}\mathrm{sh}\,x,$$

от което намираме $y'(x) = 2C_1e^{2x} - 2C_2e^{-2x} - \frac{1}{3}\mathrm{ch}\,x$.

3. От *началните условия* $y(0) = y'(0) = 0$ намираме система уравнения за константите C_1 и C_2:

$$\left| \begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) = 2C_1 - 2C_2 - \frac{1}{3} = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} C_1 = \frac{1}{12} \\ c_2 = -\frac{1}{12} \end{array} \right.$$

И така, *интегралната крива* от общото решение на даденото уравнение, която минава през точката $O(0,0)$, е с уравнение

$$y = \frac{1}{12}e^{2x} - \frac{1}{12}e^{-2x} - \frac{1}{3}\mathrm{sh}\,x = \frac{1}{6}\mathrm{sh}\,2x - \frac{1}{3}\mathrm{sh}\,x.$$

Пример 10.3. Решете *Ойлеровите* нехомогенни диференциални уравнения
а) $x^2y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x)$
б) $(2x+1)^2y'' - 4(2x+1)y' + 8y = -8x - 4$
в) $x^2y'' + xy' - y = e^x(x-1)$.

Решение. а) Точката $x = 0$ е *особена* за уравнението. Нека $x > 0$, т.е. търсим решения вдясно от особената точка.

- *Полагаме* $x = e^t$, t - параметър, $\dot{x} = e^t$, $(t = \ln x)$.
- От $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{\dot{y}}{e^t} \Longrightarrow y' = e^{-t}y$.
- Получения резултат *диференцираме по* t

$$y''\dot{x} = \ddot{y}e^{-t} - \dot{y}e^{-t} \Longrightarrow y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}).$$

- *Заместваме* в даденото уравнение и получаваме (10.5), вж. Т2:

$$\ddot{y} + y = 2\sin t. \tag{10.5}$$

1. Решаваме *съответното хомогенно уравнение*: $\ddot{y} + y = 0 \Longrightarrow r^2 + 1 = 0 \Longrightarrow r_{1,2} = \pm i$. Тогава

$$Y(t) = C_1\cos t + C_2\sin t \Longrightarrow Y(x) = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x).$$

2. *Решението на (10.5)* намираме по формулата $y(x) = Y(x) + \eta(x)$:

- $\ddot{y} + y = 2\sin t = e^{0t}(0\cos t + 2\sin t)$.
- От $m_1 = m_2 = 0 \Longrightarrow \max(0,0) = 0 = m$ и тогава $P_m(t) = A$, $P_m^*(t) = B$.
- От $\alpha = 0$, $\beta = 1 \Longrightarrow \alpha \pm i\beta = \pm i = r_{1,2} \Longrightarrow \mu = 1$.

Тогава $\eta(t) = e^{0t}t(A\cos t + B\sin t)$.

$$\begin{array}{cr|l} & 1. & \eta(t) = At\cos t + Bt\sin t \\ + & & \dot{\eta}(t) = A\cos t - At\sin t + B\sin t + Bt\cos t \\ & 1. & \ddot{\eta}(t) = -2A\sin t - At\cos t + 2B\cos t - Bt\sin t. \end{array}$$

От $\ddot{\eta} + \eta \equiv 2\sin t \Longrightarrow -2A\sin t + 2B\cos t \equiv 2\sin t + 0\cos t$

$$\left|\begin{array}{l} -2A = 2 \\ 2B = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} A = -1 \\ B = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \eta(t) = -t\cos t \Longrightarrow \eta(x) = -\ln x\cos(\ln x).$$

Общото решение на даденото уравнение е

$$y(x) = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x) - \ln x\cos(\ln x).$$

б) Точката $x = -\dfrac{1}{2}$ е особена за уравнението. Нека $2x + 1 > 0$, т.е. търсим решения вдясно от особената точка.

- *Полагаме* $2x+1=e^t$, t - параметър, $\dot{x}=\dfrac{e^t}{2}$, $(t=\ln(2x+1))$.
- От $y'=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{2\dot{y}}{e^t}\Longrightarrow y'=2e^{-t}\dot{y}$.
- Получения резултат *диференцираме по* t

$$y''\dot{x}=2(e^{-t}\ddot{y}-e^{-t}\dot{y})\Longrightarrow y''=4e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y}).$$

- *Заместваме* в даденото уравнение и получаваме уравнение (10.6), вж. Т1:

$$\ddot{y}-3\dot{y}+2y=-e^t. \tag{10.6}$$

1. Решаваме *съответното хомогенно уравнение*: $\ddot{y}-3\dot{y}+2y=0\Longrightarrow r^2-3r+2=0\Longrightarrow r_1=2,\ r_2=1$. Тогава

$$Y(t)=C_1e^{2t}+C_2e^t\Longrightarrow Y(x)=C_1e^{\ln(2x+1)^2}+C_2e^{\ln(2x+1)}$$
$$\Longrightarrow Y(x)=C_1(2x+1)^2+C_2(2x+1).$$

2. *Решението на (10.6)* намираме по формулата $y(x)=Y(x)+\eta(x)$:

- $\ddot{y}-3\dot{y}+2y=e^{-t}=e^tP_0(t)$.
- От $k=1=r_2$ и $m=0\Longrightarrow\mu=1$ и тогава $\eta(t)=Ae^tt$.

$$\begin{array}{cr|l} & 2. & \eta(t)=Ae^tt\\ + & (-3) & \dot{\eta}(t)=e^t(At+A)\\ & 1. & \ddot{\eta}(t)=e^t(At+2A).\end{array}$$

От $\ddot{\eta}-3\dot{\eta}+2\eta\equiv-e^t\Longrightarrow e^t(-A)\equiv-e^t\Longrightarrow A=1$.
От $\eta(t)=e^tt\Longrightarrow\eta(x)=(2x+1)\ln(2x+1)$ и тогава общото решение е

$$y(x)=C_1(2x+1)^2+C_2(2x+1)+(2x+1)\ln(2x+1).$$

в) Точката $x=0$ е особена за уравнението и търсим решения вдясно от особената точка $(x>0)$.

- *Полагаме* $x=e^t$, t - параметър, $\dot{x}=e^t$, $(t=\ln x)$.
- От $y'=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{\dot{y}}{e^t}\Longrightarrow y'=e^{-t}\dot{y}$, $y''=e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y})$, вж. а).
- *Заместваме* и получаваме уравнение (10.7), вж. гл. 9,Б.

$$\ddot{y}-y=e^{e^t}(e^t-1)=f(t). \tag{10.7}$$

1. Решаваме съответното *хомогенно* уравнение: $\ddot{y}-y=0\Longrightarrow r^2-1=0\Longrightarrow r_{1,2}=\pm1$. Тогава

$$Y(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}\Longrightarrow Y(x)=C_1x+C_2\frac{1}{x}.$$

2. Решението на (10.7) намираме по формулата $y(x)=Y(x)+\eta(x)$, където $\eta(x)$ определяме чрез системата на Лагранж:

- *вид на* $\eta(x)$: $\eta(x) = u_1(x)x + u_2(x)x^{-1}$.
- *система на Лагранж*:

$$\left| \begin{array}{l} u_1'x + u_2'x^{-1} = 0 \\ u_1'1 + u_2'(-x^{-2}) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}. \end{array} \right.$$

- От $u_1' = \frac{1}{2}\dfrac{e^x(x-1)}{x^2} \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{x}dx + \frac{1}{2}\int e^x d\Big(\frac{1}{x}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{x}dx + \frac{1}{2x}e^x - \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{x}dx = \frac{e^x}{2x}. \end{aligned}$$

- От $u_2' = -\dfrac{1}{2}e^x(x-1) \Longrightarrow$

$$u_2(x) = -\frac{1}{2}\int (x-1)de^x = -\frac{1}{2}e^x(x-1) + \frac{1}{2}\int e^x dx = -\frac{1}{2}e^x x + e^x.$$

Тогава $\eta(x) = \dfrac{e^x}{2x}x + \Big(e^x - \dfrac{x}{2}e^x\Big)\dfrac{1}{x} = \dfrac{e^x}{x}$, а *общото решение* на даденото уравнение е

$$y(x) = C_1x + C_2\frac{1}{x} + \frac{e^x}{x}.$$

ЗАДАЧИ

I. Решете *диференциалните уравнения*:

1. $y'' + 2y' + y = x + 1$ Отг. $y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + x - 1$
2. $y'' - y = e^x(x+1)$ Отг. $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \dfrac{x}{4}e^x(x+1)$
3. $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$ Отг. $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + 4x^2e^{-2x}$
4. $y'' + y' + y = e^x(x^2 + x)$

   Отг. $y(x) = e^{-x}(C_1\cos x\sqrt{3} + C_2\sin x\sqrt{3}) + \dfrac{e^x}{9}(3x^2 - 3x + 5)$
5. $y^{\text{iv}} + y'' = x^2 + x$

   Отг. $y(x) = C_1x + C_2 + C_3\cos x + C_4\sin x + \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{6} - x^2$
6. $y''' + y'' = 12x^2 + 6$ Отг. $y(x) = C_1x + C_2 + C_3e^x - x^4 - 4x^3 - 15x^2$
7. $y''' + y'' = 1 - 6e^{-x}$ Отг. $y(x) = C_1x + C_2 + C_3e^{-x} + \dfrac{1}{2} - 6xe^{-x}$

8. $y''' - 3y' + 2y = e^{-2x}(4x^2 + 4x - 10)$

Отг. $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x} + \frac{2x}{27} e^{-2x}(2x^2 + 7x - 7)$

9. $y''' - y'' - y' + y = e^x(24x - 4) + 3x$

Отг. $y(x) = e^x(C_1 x + C_2) + C_3 e^{-x} + 2e^x x^2(x+1) + 3(x+1)$

10. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$ Отг. $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{e^{3x}}{2}(x^2 - 2x + 2)$

11. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$ Отг. $y(x) = (C_1 x + C_2)e^{2x} + \frac{x^3}{6} e^{2x}$.

II. Решете *диференциалните уравнения*:

1. $y''' - 4y' = \sin x$ Отг. $y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{5}\cos x$
2. $y^{\text{IV}} + y'' = 2\cos x$

Отг. $y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_3 \sin x - x \sin x$

3. $y'' + y = x \sin x$ Отг. $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{2-x}{2}\cos x + \frac{x+1}{2}\sin x$
4. $y'' - 2y' + 2y = e^x(2\cos x - 4x \sin x)$

Упътване. $\eta(x) = e^x x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]$

Отг. $y(x) = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^x x^2 \cos x$

5. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$ Отг. $y(x) = C_1 + C_2 e^{-2x} + 2e^x \sin x$
6. $y'' - 9y = x^2 e^{3x} + e^{3x}\cos x$

Отг. $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{e^{3x}}{108}(6x^3 - 3x^2 + x) + \frac{e^{3x}}{37}$

7. $y'' + 4y = \cos 2x - xe^{3x}$

Отг. $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{e^{3x}}{169}(13x + 1)$

8. $y''' - 4y' = 5\sin x + x^2$

Отг. $y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + \cos x - x\left(\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{8}\right)$

9. $y^{\text{IV}} + y'' = 3\cos x + 7x$

Отг. $y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{3}{2} x \sin x + \frac{7}{6} x^3$

10. $y'' + 4y = 5\sin 2x + x^2$

Отг. $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{5}{4} x \cos 2x + \frac{2x^2 - 1}{8}$

11. $y^{\text{IV}} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = \frac{1}{2}\cos x + xe^x$

Отг. $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (C_3 x + C_4)e^{-x} - \frac{x}{8}\cos x + \frac{x-2}{8}$

12. $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 12e^{3x}\cos x$

Отг. $y(x) = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x + 3x) - \frac{e^{3x}}{10}(3\cos x + \sin x)$.

III. Решете *диференциалните уравнения*:

1. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1} + \cos x$

Отг. $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + x \operatorname{arctg} x - e^x \ln\sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{2}\sin x$

2. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x} + \sin x$

Отг. $y(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - e^{-x} x \cos x$
$+e^{-x} \sin x \ln|\sin x| + \dfrac{1}{5} \sin x - \dfrac{2}{5} \cos x$

3. $y'' - 4y' + 4y = e^x - \operatorname{sh}(x-1)$

Отг. $y(x) = e^{2x}(C_1 x + C_2) + \left(1 - \dfrac{1}{2e}\right)e^x + \dfrac{e}{18} e^{-x}$

4. $y'' + y + \sin 2x = \dfrac{1}{\cos x}$

Отг. $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{1}{3} \sin 2x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$

5. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x + x e^{-2x}$

Отг. $y(x) = e^{-2x}\left[C_1 x + C_2 + \dfrac{x^2}{4}(2\ln x - 3) + \dfrac{x^3}{6}\right]$

6. $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + x^2 + 1$ Отг. $y(x) = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \dfrac{1}{\cos x}$
$+ \cos x \ln|\cos x| + x \sin x - \operatorname{tg} x \sin x + \dfrac{1}{3} x^3 - x$

7. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x} + \sin 2x + x^2 e^{2x}$ Отг. $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$
$- \cos 2x \ln \sqrt{1 - \cos 2x} - \cos^2 x - x \sin 2x + \dfrac{e^{2x}}{32}(4x^2 - 4x + 1)$

8. $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x + x + \sin x$

Отг. $y(x) = C_1 + C_2 e^x + \dfrac{1}{2}(\cos x - \sin x) - \dfrac{x^2}{2} - x - \cos e^x$

9. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2x}} + 2 \sin x + x^2 + 2$ Отг. $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
$+ \dfrac{\cos x}{\sqrt{2}} \ln|\sqrt{2} \cos x + \sqrt{\cos 2x}| + x^2 - x \cos x + \dfrac{\sin x}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2} \sin x)$

10. $y'' + 4y = \cos 2x - x e^{3x} + 2 \operatorname{tg} x$ Отг. $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$
$+ \dfrac{x}{4} \sin 2x + \dfrac{e^{3x}}{169}(6 - 13x) + \cos 2x \ln|\cos 2x| - \dfrac{1}{2}(\cos 2x + x \sin 2x) - \dfrac{1}{2} \cos 4x$

11. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1} + (2x+1)\sin x$ Отг. $y(x) = e^{-x}(C_1 x + C_2)$
$+ \left(\dfrac{1}{2} - x\right) \cos x + \sin x + 2e^{-x}\sqrt{(x+1)^3}\,(2x+1) - \dfrac{6}{5} e^{-x} \sqrt{(x+1)^5}$

12. $y'' - 3y' + 2y = 4x e^{-x} + \dfrac{e^{3x}}{1 + e^{2x}}$

Отг. $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \dfrac{e^{-x}}{9}(6x + 5) - \dfrac{e^x}{2} \ln(1 + e^{2x}) + e^{2x} \operatorname{arctg} e^x$

13. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x\sqrt{a^2 - x^2}}$

Отг. $y(x) = C_1 x e^{2x} + C_2 e^{2x} - \dfrac{x e^{2x}}{a} \ln\left|\dfrac{a}{x} + \sqrt{\dfrac{a^2}{x^2} - 1}\right| - e^{2x} \arcsin \dfrac{x}{a}$

14. $y''' - 3y' + 2y = e^x + \dfrac{e^{3x}}{1 + e^{2x}}$

Отг. $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x e^x - \dfrac{e^x}{2} \ln(1 + e^{2x}) + e^{2x} \operatorname{arctg} e^x$

15. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x} + x + 2e^x$

Отг. $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{\cos 2x}{2\cos x} + x + e^x$

16. $y'' + y = 3x^2 + \dfrac{1}{\sin x}$

Отг. $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 3x^2 - 6 - x\cos x + \ln|\sin x| \sin x.$

IV. Решете *Ойлеровите* диференциални уравнения:

1. $x^2y'' - xy' + y = 6x\ln x$ Отг. $y(x) = C_1x + C_2x\ln x + x\ln^3 x$
2. $x^2y'' + xy' + 4y = 3x\ln^2 x + \cos(2\ln x)$ Отг.
$y(x) = C_1\cos(2\ln x) + C_2\sin(2\ln x) + x\left(\dfrac{3}{5}\ln^2 x - \dfrac{12}{25}\ln x - \dfrac{6}{125}\right) + \dfrac{\ln x}{4}\sin(2\ln x)$
3. $x^3y'' - 2xy = \ln x$
Упътване: Разделете уравнението на $x \neq 0$.
Отг. $y(x) = \dfrac{C_1}{x} + C_2x^2 - \dfrac{\ln x}{4x}(3\ln x + 2)$
4. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 3x + 2$
Отг. $y(x) = x(C_1\cos(\ln|x|) + C_2\sin(\ln|x|)) + \dfrac{x^2}{2} + 3x + 1$
5. $x^3y''' + 3x^2y'' - 6xy' + 6y = x$ Отг. $y(x) = C_1x + C_2x^2 + C_3\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{x}{4}\ln x$
6. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$ Отг. $y(x) = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3;$
7. $x^2y'' - xy' + y = 4x^3$ Отг. $y(x) = x^3 + x(C_1 + C_2\ln|x|)$
8. $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$ Отг. $y(x) = x^3(C_1 + C_2x^4)$
9. $x^2y'' + xy' + y = x$ Отг. $y(x) = \dfrac{x}{2} + C_1\cos(\ln|x|) + C_2\sin(\ln|x|)$
10. $y'' - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{2}{x}$ Отг. $y(x) = x(C_1 + C_2\ln|x| + \ln^2|x|)$
11. $x^2y'' - 2xy' + 2y + x - 2x^3 = 0$ Отг. $y(x) = x\ln|x| + C_1x + C_2x^2 + x^3$
12. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$ Отг. $y(x) = x^2[C_1\cos(\ln|x|) + C_2\sin(\ln|x|) + 3].$