Изпитна тема по ММЦО - 2012 г.

I – ви магистърски курс към ФЕТТ, специалност Електроника

Преподавател: доц. д-р Георги Венков

1. Нека $f(x) = x^2,\ x \in [-\pi, \pi],\ f(x+2\pi) = f(x)$. Да се развие в ред на Фурие и с помощта на получения ред да се намерят сумите $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ и $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. Да се намери функцията $f(x)$ от интегралните уравнения:

а) $\int_0^{\infty} f(x)\cos(\lambda x)\,dx = \frac{1}{1+\lambda^2},\quad \lambda \in (-\infty, +\infty);$

б) $\int_0^{\infty} f(x)\sin(\lambda x)\,dx = e^{-\lambda},\quad \lambda \in (0, +\infty);$

3. Дадени са сигналите $x(n) = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-3} u(n)$ и $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n-2)$. Намерете редицата $y(n)$, дефинирана чрез $y(n) = (x * h)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$. Намерете асимптотиката на редицата $\lim_{n\to\infty} y(n)$.

4. Решете диференчното уравнение

$$\left|\begin{aligned} & y(n) - \frac{1}{4} y(n-2) = x(n) - x(n-1), \\ & x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n), \quad y(-1) = 0, \quad y(-2) = 4. \end{aligned}\right.$$

5. Дадена е времевата редица $\{x(nT)\}_{n=0}^{5} = \{1, 2, 1, 1, 0, -2\}$. Намерете компонентите $\{X(k\Omega)\}_{k=0}^{5}$ на съответното ДПФ. За намерените комплексни стойности, проверете верността на формулата за ОДПФ и на дискретното равенство на Парсевал.

6. Нека $\{x_1(nT)\}_{n=0}^{3}$ и $\{x_2(nT)\}_{n=0}^{3}$ са две редици с еднаква честота на дискретизация.
Ако $\{X_1(k\Omega)\}_{k=0}^{3} = \{2, -1-i, -4, -1+i\}$ и $\{x_2(nT)\}_{n=0}^{3} = \{1, -2, -1, 1\}$, намерете кръговите корелация и конволюция на двата сигнала, прилагайки съответните теореми.

<u>Зад 5</u> Стоян Лазаров гр 219. Фак № 101311021

$$\{x(nT)\}_{n=0}^{5} = \{1, 2, 1, 1, 0, -2\}$$

ДПФ $X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{5} x(nT).e^{-jk\frac{\pi}{3}n}$

$$X(0) = 1+2+1+1+0-2 = 3$$

$$X(1) = 1+2.\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1.\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1.(-1)+0-2\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+1-j\sqrt{3}-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}-1-1-j\sqrt{3} = -\frac{1}{2}-j\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$X(2) = 1+2\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1.\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1.(1)+0-2\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1-1-j\sqrt{3}-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}+1+1-j\sqrt{3} = \frac{3}{2}-j\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$X(3) = 1+2.(-1)+1.(1)+1.(-1)+0-2.(-1) = 1$$

$$X(4) = 1+2.\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1.\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1.(1)+0-2\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1-1+j\sqrt{3}-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}+1+1+j\sqrt{3} = \frac{3}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$X(5) = 1+2\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1.\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1.(-1)+0-2\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+1+j\sqrt{3}-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}-1-1+j\sqrt{3} = -\frac{1}{2}+j\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{\{X(k\Omega)\}_{k=0}^{5} = \left\{3, -\frac{1}{2}-j\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}-j\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{3}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+j\frac{5\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

Проверка с ОДПФ

$$\{x(nT)\}_{n=0}^{5} = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} X(k\Omega)e^{jk\frac{\pi}{3}n}$$

$$x(0) = \frac{1}{6}.\left[3+\left(\frac{1}{2}-j\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)+(1)+\left(\frac{3}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+j\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\right] = 1$$

$$x(1) = \frac{1}{6}\left[3+\left(-\frac{1}{2}-j\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1.(-1)+\left(\frac{3}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+j\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = 2$$

$$x(2) = \frac{1}{6}\left[3+\left(-\frac{1}{2}-j\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1.(1)+\left(\frac{3}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+j\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = 1$$

$$x(3) = \frac{1}{6}\left[3+\left(\frac{1}{2}-j\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)(-1)+\left(\frac{3}{2}-j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)(1)+1.(-1)+\left(\frac{3}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)(1)+\left(-\frac{1}{2}+j\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)(-1)\right] = 1$$

$$x(4) = \frac{1}{6}\left[3+\left(-\frac{1}{2}-j\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}.3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1.(1)+\left(\frac{3}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+j\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = 0$$

$$x(5) = \frac{1}{6}\left[3+\left(-\frac{1}{2}-j\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1(-1)+\left(\frac{3}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+j\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = -2$$

$\{x(nT)\}_{n=0}^{5} = \{1, 2, 1, 1, 0, -2\}$ доказва се верността на формулата

Дискретно равенство на Парсевал

$$\sum x^2(nT) = \frac{1}{6}\sum X^2(k\Omega)$$

$$1^2+2^2+1^2+1^2+0+(-2)^2 = \frac{1}{6}\left[3^2+\left(-\frac{1}{2}-j\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}+j\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+1^2+\left(-\frac{1}{2}+j\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]$$

$$\cancel{11=11} \quad 11 = \frac{1}{6}\left[9+\frac{1}{4}+\cancel{j\frac{10\sqrt{3}}{4}}+\frac{75}{4}+\frac{9}{4}-\cancel{j\frac{18\sqrt{3}}{4}}+\frac{27}{4}+1+\frac{9}{4}+\cancel{j\frac{18\sqrt{3}}{4}}+\frac{27}{4}+\frac{1}{4}-\cancel{j\frac{10\sqrt{3}}{4}}+\frac{75}{4}\right]$$

$\underline{11} = \underline{11}$ доказва верността на формулата

Зад 6 Стоян Лазаров гр 219 Фак №: 101311021

$\{x_1(nT)\}_{n=0}^{3}$ и $\{x_2(nT)\}_{n=0}^{3}$ $\quad j^2=-1$

Ако $\{X_1(k\Omega)\}_{k=0}^{3}=\{2,-1-j,-4,-1+j\}$ и $\{x_2(nT)\}_{n=0}^{3}=\{1,-2,-1,1\}$

$$X(k\Omega)=\sum_{n=0}^{3}x(nT).e^{-j k\frac{\pi}{2}.n}$$

$$X_2(0\Omega)=\sum_{n=0}^{3}x(nT).e^{0}=1+(-2)+(-1)+1=-1$$

$$X_2(1\Omega)=\sum_{n=0}^{3}x(nT).e^{j\frac{\pi}{2}.n}=1-2.e^{j\frac{\pi}{2}}-1.e^{j\pi}+1.e^{-j\frac{3\pi}{2}}=1-2.(-j)-1.(-1)+1.(j)=2+3j$$

$$X_2(2\Omega)=\sum_{n=0}^{3}x(nT).e^{j\pi.n}=1-2.(-1)-1.(1)+1.(-1)=1$$

$$X_2(3\Omega)=\sum_{n=0}^{3}x(nT).e^{j\frac{3\pi}{2}.n}=1-2.(j)-1(-1)+1(-j)=2-3j$$

$$\{X_1(k\Omega)\}_{k=0}^{3}=\{2,-1-j,-4,-1+j\}$$
$$\{X_2(k\Omega)\}_{k=0}^{3}=\{-1,2+3j,1,2-3j\}$$

$X=\overline{X_1}.X_2$ $\qquad \overline{X_1}=\{2,-1+j,-4,-1-j\}$ $\quad\Rightarrow X=\{-2,-5-j,-4,-5+j\}$

$\qquad\qquad X_2=\{-1,2+3j,1,2-3j\}$

$$X(nT)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{3}X(k\Omega).e^{jk\frac{2\pi}{N}.n}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(k\Omega).e^{jk\frac{\pi}{2}.n}$$

$$x(0T)=\frac{1}{4}.(-2-5-\cancel{j}-4-5+\cancel{j})=-4$$

$$x(1T)=\frac{1}{4}.\left(-2+(-5-j).(-j)+(-4).(-1)+(-5+j)(j)\right)=\frac{1}{4}\left(-2+\cancel{5j}+j^2+4-\cancel{5j}+j^2\right)=0$$

$$x(2T)=\frac{1}{4}.\left(-2+(-5-j)(-1)+(-4)(1)+(-5+j)(-1)\right)=\frac{1}{4}\left(-2+5+\cancel{j}-4+5-\cancel{j}\right)=1$$

$$x(3T)=\frac{1}{4}.\left(-2+(-5-j)(-j)+(-4)(-1)+(-5+j)(j)\right)=\frac{1}{4}\left(-2+\cancel{5j}+j^2+4-\cancel{5j}+j^2\right)=0$$

$$\{x(nT)\}_{n=0}^{3}=\{-4,0,1,0\}$$

$$r_{12}(n)=\frac{1}{N}.F^{-1}(\overline{X_1}X_2)$$

$r_{12}(0)=\frac{1}{4}.(-4)=-1$ $\qquad r_{12}(2)=\frac{1}{4}.(1)=\frac{1}{4}$

$r_{12}(1)=\frac{1}{4}.(0)=0$ $\qquad r_{12}(3)=\frac{1}{4}.(0)=0$

$$x_1 * x_2=F^{-1}[X_1(k).X_2(k)]$$
$$X_1(k)=\{2,-1-j,-4,-1+j\}$$
$$X_2(k)=\{-1,2+3j,1,2-3j\}$$
$$X_1(k).X_2(k)=\{-2,1-5j,-4,1+5j\}$$
$$\Downarrow$$
$$X(nT)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{3}X(k\Omega).e^{jk\frac{\pi}{2}.n}$$

$$x(0)=\frac{1}{4}(-2+1-\cancel{5j}-4+1+\cancel{5j})=-1$$

$$x(1) = \frac{1}{4}\cdot\left(-2 + (1-5j)(j) - 4\cdot(-1) + (1+5j)(-j)\right) = \frac{1}{4}\left(-2 + \cancel{j} - 5j^2 + 4 - \cancel{j} - 5j^2\right) = \frac{12}{4} = 3$$

$$x(2) = \frac{1}{4}\left(-2 + (1-5j)(-1) - 4\cdot(1) + (1+5j)(-1)\right) = \frac{1}{4}\left(-2 - 1 + \cancel{5j} - 4 - 1 - \cancel{5j}\right) = -2$$

$$x(3) = \frac{1}{4}\left(-2 + (1-5j)(-j) - 4(-1) + (1+5j)(j)\right) = \frac{1}{4}\left(-2 - \cancel{j} + 5j^2 + 4 + \cancel{j} + 5j^2\right) = -2$$

$X = \{-1, 3, -2, -2\}$

$X^* = \{-2, -2, 3, -1\}$

$r^*_{12}(0) = \frac{1}{4}\cdot(-2) = -\frac{1}{2}$

$r^*_{12}(1) = \frac{1}{4}\cdot(-2) = -\frac{1}{2}$

$r^*_{12}(2) = \frac{1}{4}\cdot(3) = \frac{3}{4}$

$r^*_{12}(3) = \frac{1}{4}(-1) = -\frac{1}{4}$

Зад 4. Стоян Лазаров гр 119 фак № 101311021

$$y(n) - \frac{1}{4}y(n-2) = x(n) - x(n-1)$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n), \; y(-1) = 0, \; y(-2) = 4$$

Определяме частното решение. От табл 1-2 (стр 2) виждаме, че за $x(n) = a^n C$ $y_p(n) = C_n a^n$

Заместваме:

$$C n\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot C = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad / : \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$Cn - 1C(n-2) = -1 \Rightarrow Cn = 1C(n-2) - 1 \Rightarrow Cn = Cn - 2C - 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$y(n) = +\frac{1}{2} n \left(\frac{1}{2}\right)^n + A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2\left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0$$

за $n=0$

$$y(0) = \frac{1}{4}y(-2) + x(0) - x(-1) = 1 + 1 = 2$$

за $n=1$

$$y(1) = \frac{1}{4}y(-1) + x(1) - x(0) = -1$$

$$\Rightarrow \quad 2 = A_1 + A_2$$

$$-1 = +\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{4}A_2$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = 2 - A_2$$

$$\frac{A_2}{4} = \frac{1}{4} + 1 - \cancel{1} \quad \Rightarrow A_2 = 1 \quad \Rightarrow A_1 = 1$$

$$\Rightarrow \underline{y(n) = \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

Зад 3 Стоян Лазаров гр 219 Фак № 101311021

$x(n) = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-3} u(n)$ $\quad h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n-2)$ $\quad y(n) = ?$ ако $y(n) = (x * h)(n) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)$

$\lim\limits_{n \to \infty} y(n) = ?$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-3} \cdot u(k) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} u(n-k-2)$$

Поради съществуването на единичен скок $u(k)$ долната граница на сумата може да се промени до $k=0$.
Тъй като $u(n-k-2)$ е нула за $k > n-2$ горната граница на сумата може да бъде променена до $k = n-2$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = 6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{2}{6}\right)^{k} \qquad \text{за } n \geq 3$$

Ако използваме геометричния ред за да пресметнем редицата получаваме:

$$y(n) = 6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \cdot 6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \left[1 - 9\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right] \qquad \text{за } n \geq 3$$