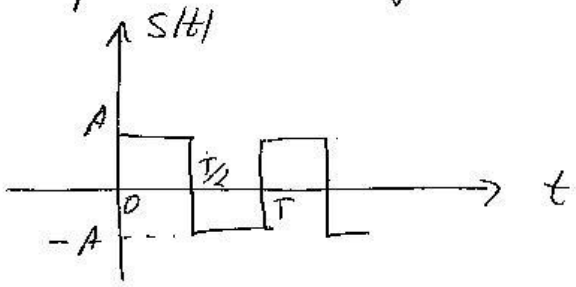
1. Да се състави математическо описание на периодичния сигнал $S(t)$ показан на фигурата. Да се определят амплитудния и фазов спектър на сигнала и да се начертаят спектрални диаграми.



Решение:

$$S(t) = \begin{cases} A; & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ -A; & \frac{T}{2} < t \le T \end{cases}$$ — за един период

Тъй като заграждащ равни площи над и под оста на времето в един период $\Rightarrow a_0 = 0$

$S(t) = -S(t)$ – нечетна функция $\Rightarrow a_k = 0$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \cdot \sin k\omega_0 t \, dt$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} A \cdot \sin k \frac{2\pi}{T} t \, dt - \int_{T/2}^{T} A \sin k \frac{2\pi}{T} t \, dt \right]$$

$$C_k = \frac{2}{T}\left[\frac{-AT}{k2\pi}\cdot\cos\frac{k2\pi t}{T}\Big|_0^{T/2} + \frac{AT}{k2\pi}\cos\frac{k2\pi t}{T}\Big|_{T/2}^{T}\right]$$ (2)

$$= -\frac{A}{k\pi}\cdot\cos\frac{k2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2} + \frac{A}{k\pi}\cdot\cos 0 + \frac{A}{k\pi}\cdot\cos k2\pi - \frac{A}{k\pi}\cdot\cos\frac{k2\pi}{T/2}$$

$$= -\frac{A}{k\pi}\cdot\cos k\pi + \frac{A}{k\pi} + \frac{A}{k\pi} - \frac{A}{k\pi}\cdot\cos k\pi$$

$$= \frac{A}{k\pi}\left[-\cos k\pi + 2 - \cos k\pi\right] = \frac{A}{k\pi}\left[-2\cos k\pi + 2\right]$$

– ако k е нечетно

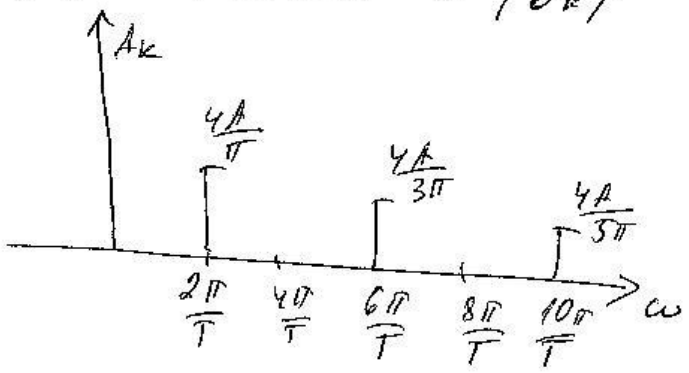
$\cos k\pi = -1 \Rightarrow b_k = \frac{4A}{k\pi}$

– ако k е четно

$\cos k\pi = 1 \Rightarrow b_k = 0$

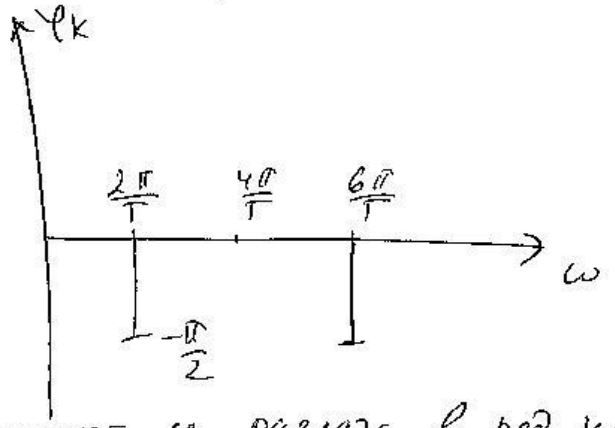
АЧС

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = |b_k|$$



фис

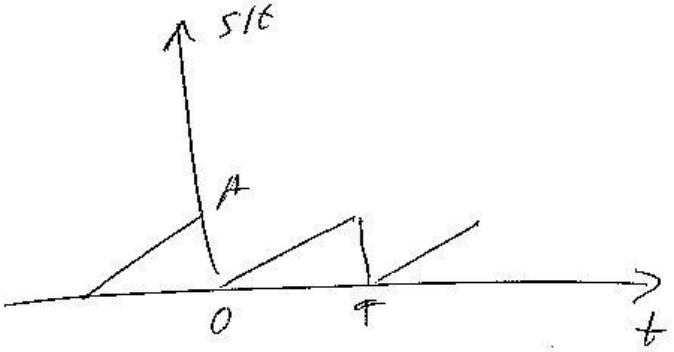
$$\varphi_k = -\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k} = -\frac{\pi}{2}$$



Сигналът се разлага в ред на Фурие сл.

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4A}{k\pi} \cdot \cos\left(k\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4A}{k\pi} \cdot \sin k\omega_0 t$$

2. Да се определят амплитудния и фазов спектър на периодичен сигнал $s(t)$ показан на фигурата



Решение:

(7)

$$s(t) = \frac{A}{T} t$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} t \, dt = \frac{AT}{2}$$

Абстрахирайки се от постоянната съставка $s(t)$ се описва с нечетна функция $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_k = 0$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \sin k\omega_0 t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} t \cdot \sin \frac{2k\pi}{T} t \, dt$$

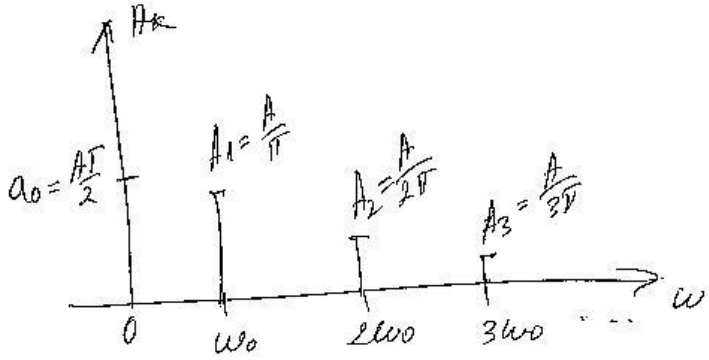
$$= \frac{2A}{T^2} \int_0^T t \, d\left(-\frac{T}{2k\pi} \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T}\right) =$$

$$\frac{2A}{T^2} \left[-\frac{tT}{2k\pi} \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T} \Big|_0^T - \underbrace{\int \ldots\ldots}_{=0} \right]$$

$$= -\frac{At}{k\pi T} \cdot \cos \frac{2k\pi t}{T} \Big|_0^T = -\frac{AT}{k\pi T} \cdot \cos \frac{2k\pi T}{T} + 0$$

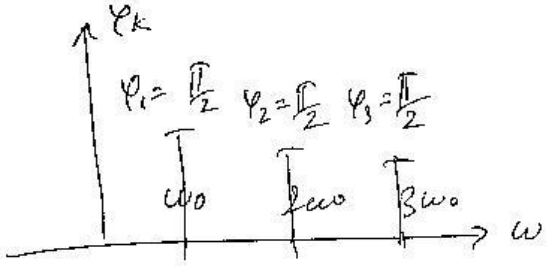
$$= -\frac{A}{k\pi}$$

$$A_k = |b_k| = \frac{A}{k\pi} \quad - \text{АЧС}$$

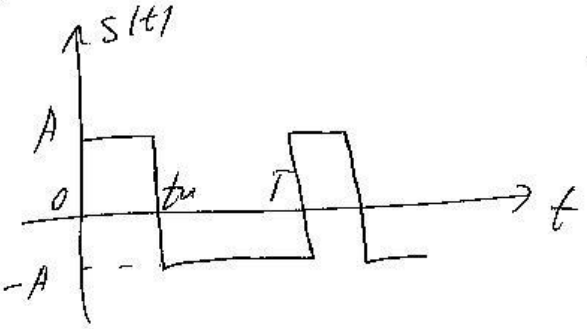


$$\varphi_k = -\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k} \quad - \text{ФЧС}$$

$$\varphi_k = -\operatorname{arctg}(-\infty) = \frac{\pi}{2}$$



3. Да се определи амплитудния спектър на периодичния сигнал $s(t)$ показан на фигурата. Да се намери връзка м/у коефициента на запълване и нулирането на определени хармонични съставки.



Решение:

$\varkappa = \frac{t_и}{T}$ $\quad t_и = \varkappa T$ $\quad$ $\varkappa$ – коефициент на запълване

$$a_0 = \frac{A}{T}\left[\int_0^{\varkappa T} dt - \int_{\varkappa T}^{T} dt\right] = \frac{AT}{T}(2\varkappa - 1) = A(2\varkappa - 1)$$

$$a_k = \frac{2A}{T}\left[\int_0^{\varkappa T} \cos\frac{2k\pi}{T}t\,dt - \int_{\varkappa T}^{T} \cos\frac{2k\pi}{T}t\,dt\right]$$

$$= \frac{2A}{k\pi}\left(\sin 2k\pi\varkappa\right)$$

$$b_k = \frac{2A}{k\pi}\left(1 - \cos 2k\pi x\right)$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{2A}{k\pi}\sqrt{\sin^2 2k\pi x + (1-\cos 2k\pi x)^2}$$

$$= \frac{2A}{k\pi}\sqrt{\sin^2 2k\pi x + 1 - 2\cos 2k\pi x + \cos^2 2k\pi x}$$

$$= \frac{2A}{k\pi}\sqrt{2 - 2\cos 2k\pi x}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$A_k = \frac{2A}{k\pi}\sqrt{2 - 2(1 - 2\sin^2 k\pi x)} = \frac{2A}{k\pi}\sqrt{\cancel{2} - \cancel{2} + 4\sin^2 k\pi x}$$

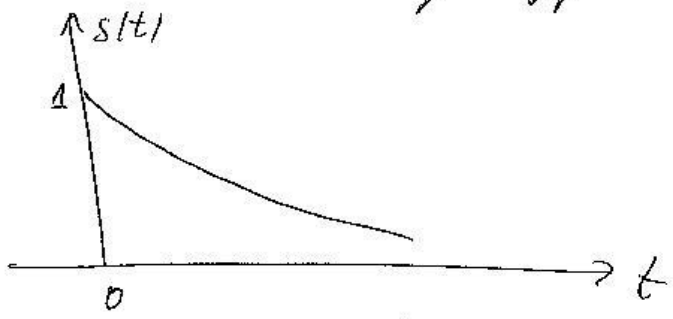
$$= \frac{2A}{k\pi}\sqrt{4\sin^2\alpha} = \frac{4A}{k\pi}\sin k\pi x$$

$$= \frac{4Ax \cdot \sin k\pi x}{k\pi x}$$

Имеет вид от вида $\frac{\sin x}{x}$

Если kx = целое число, то $A_k = 0$

4. Да се определи амплитудния и фазов спектър на сигнала $s(t)$ показан на фигурата. (8)



$$s(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & ; \quad t \geq 0 \\ 0 & ; \quad t < 0 \end{cases}$$

Решение:

Сигналът е непериодичен $\Rightarrow$ прилага се трансформация на Фурие

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

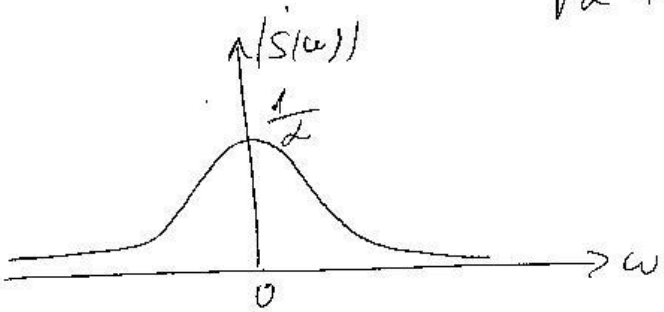
Интегрира се в границите в рамките на които сигналът е ненулев.

$$\dot{S}(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$\dot{S}(\omega) = \int_0^\infty e^{-(\alpha+j\omega)t}\,dt = -\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{\alpha+j\omega}\Bigg|_0^\infty$$

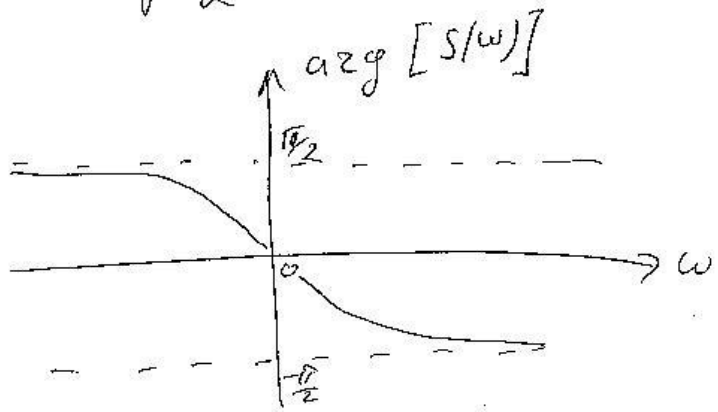
$$= \frac{1}{\alpha+j\omega}$$

$$АЧС = |\dot{S}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$



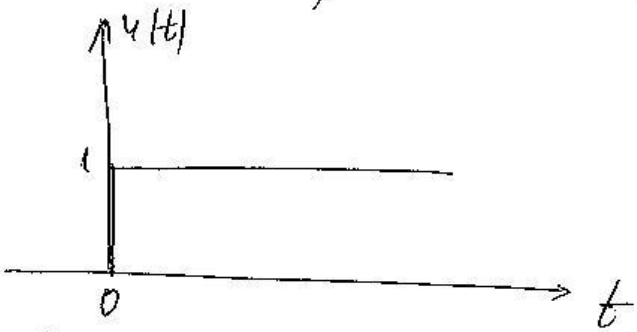
$$фчс = \arg[\dot{S}(\omega)] = \operatorname{arctg}\frac{0}{1} - \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\alpha}$$

$$= -\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\alpha}$$



5. Да се определи амплитудния и фазов спектър на единичната функция $u(t)$ (функция на Хевисайд)

(10)

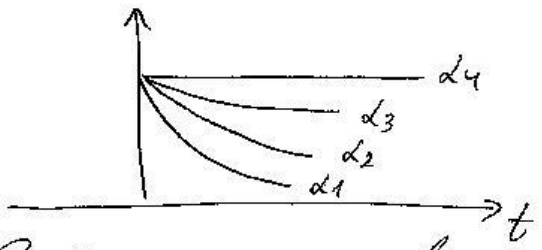


$$u(t) = \begin{cases} 1 ; & t \geq 0 \\ 0 ; & t < 0 \end{cases}$$

Решение:

Интегралът $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|\, dt$ не е ходим т.е. не се изпълнява условието $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|\, dt < \infty$

Сигналът се предполага, че е експоненциален $e^{-\alpha t}$, но при $\alpha \to 0$ т.е.



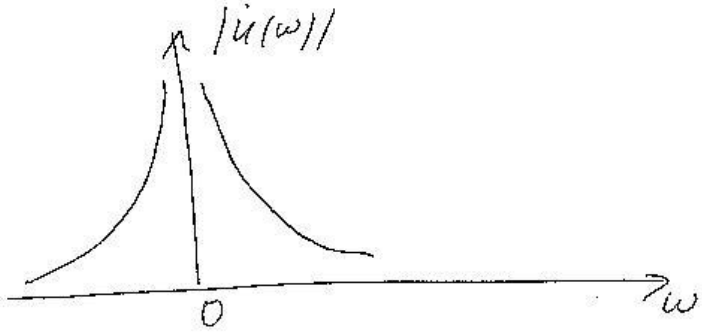
$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$

$\alpha_4 \to 0$

Задачата се свежда до решението на зад. 4 т.е. $\dot{u}(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$ при $\alpha \to 0$

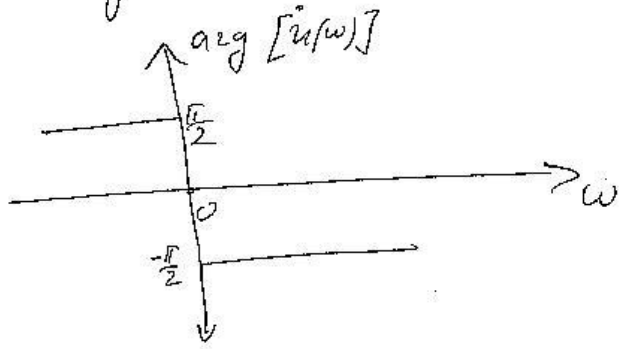
т.е. $\dot{u}(\omega) = \frac{1}{j\omega}$

АЧС $= |\dot{u}(\omega)| = \left|\frac{1}{\omega}\right|$

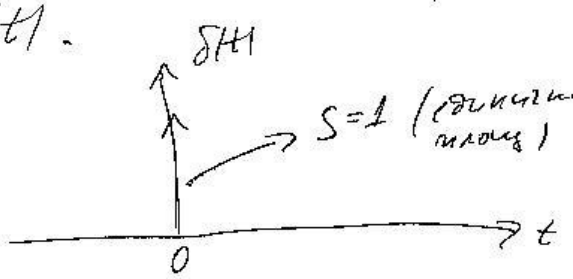


ФЧС $= \arg[\dot{u}(\omega)]$

$$\dot{u}(\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{-j}{\omega} = \frac{1}{\omega} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$



6. Да се определи спектъра на импулса на Дирак (единичен импулс) $\delta(t)$.



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty \; ; & t = 0 \\ 0 \; ; & t \neq 0 \end{cases}$$

Решение:

Тъй като $u(t) = \int \delta(t)\,dt$ и

$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$ се използва свойството

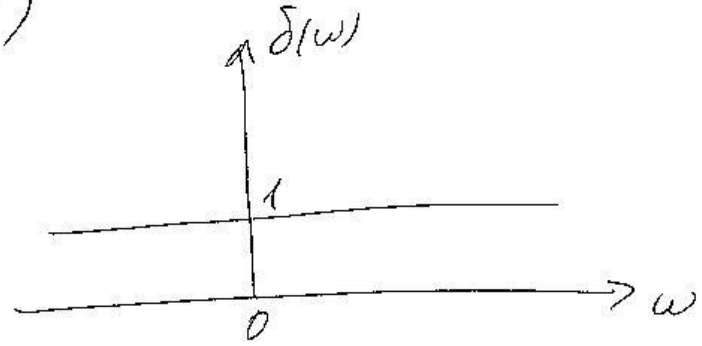
за преобразуване на фурие б/у диференциран сигнал:

$$F\left[\frac{ds(t)}{dt}\right] = \dot{S}(\omega)\cdot j\omega$$

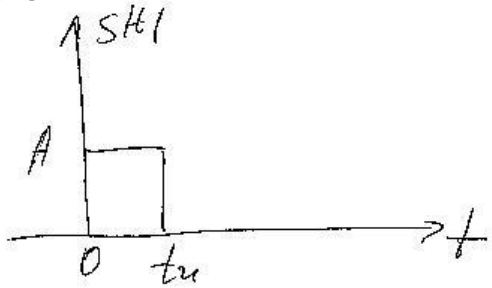
$$\dot{\delta}(\omega) = F[\delta(t)] = F\left[\frac{du(t)}{dt}\right] = \frac{1}{j\omega}\cdot j\omega$$

(от зад. 5)

$\dot{\delta}(\omega) = 1$



6. Да се определи амплитудния и фазов спектър на единичен правоъгълен импулс.



Решение:

$$s(t) = \begin{cases} A\ ; & 0 \le t \le t_и \\ 0\ ; & t < 0 \text{ или } t > t_и \end{cases}$$

$$\dot{S}(\omega) = \int_0^{t_и} A \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \frac{A}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega t}\Big|_0^{t_и}$$

$$= \frac{A}{-j\omega}\left(e^{-j\omega t_и} - 1\right) = \frac{A}{j\omega}\left(1 - e^{-j\omega t_и}\right)$$

$$= \frac{2A}{2j\omega}\left(e^{j\frac{\omega t_и}{2}} - e^{-j\frac{\omega t_и}{2}}\right) \cdot e^{-j\frac{\omega t_и}{2}}$$

Так как $\sin x = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$

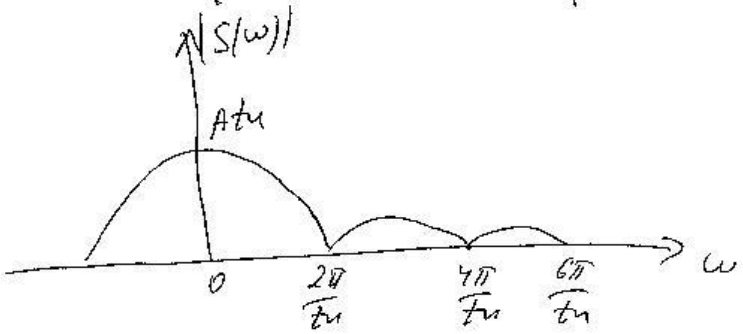
$$\dot{S}(\omega) = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega t_и}{2}\right) \cdot e^{-j\frac{\omega t_и}{2}}$$

$$АЧС = \left|\frac{2A}{\omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega t_и}{2}\right)\right| = |\dot{S}(\omega)|$$

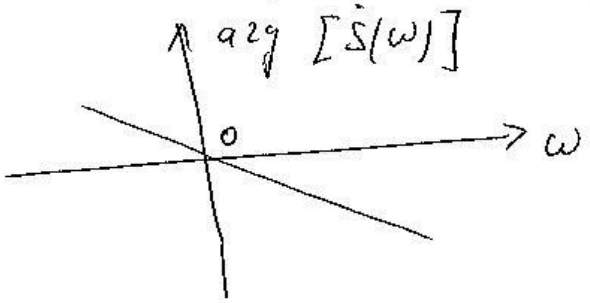
$$|\dot{S}(0)| = \lim_{\omega \to 0} \frac{2A}{\omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega t_и}{2}\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Согл. правилу ЛОПИТАЛЯ

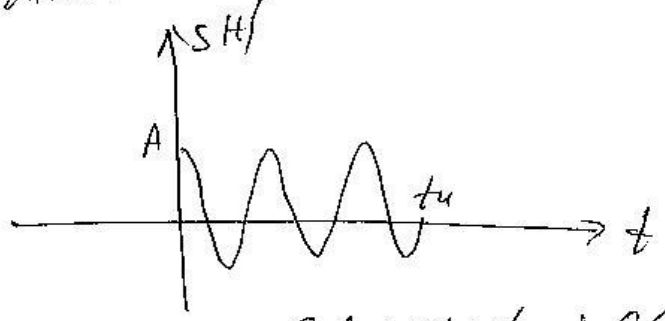
$$|\dot{S}(0)| = \lim_{\omega \to 0} \frac{2A \cdot \cos\left(\frac{\omega t_и}{2}\right) \cdot \frac{t_и}{2}}{1} = A t_и$$



$$\text{фчс} = \arg\left[\dot{S}(\omega)\right] = -\frac{\omega t_и}{2}$$



7. Да се определи спектра на единичен радиоимпулс



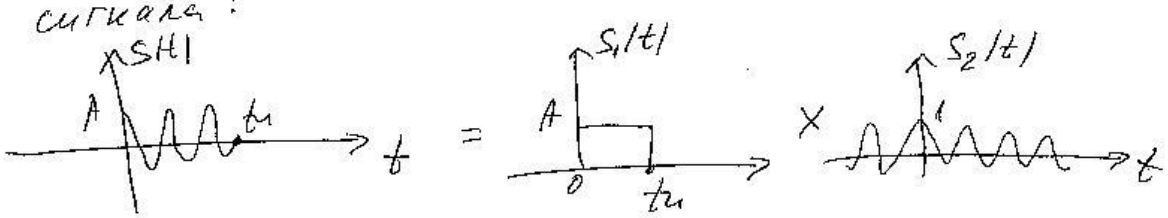
$$S(t) = \begin{cases} A \cdot \cos\omega_0 t & ; 0 \le t \le t_и \\ 0 & ; t < 0 \text{ или } t > t_и \end{cases}$$

Решение:

Сигналът е непериодичен, защото е с крайна продължителност → прилага се преобразуване на Фурие

$$\dot{S}(\omega) = \int_0^{t_и} A \cdot \cos\omega_0 t \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

По удобно е да се използва следното представяне на сигнала:



Т.е. $s(t) = s_1(t) \cdot s_2(t) = s(t) = s_1(t) \cdot \cos\omega_0 t$,

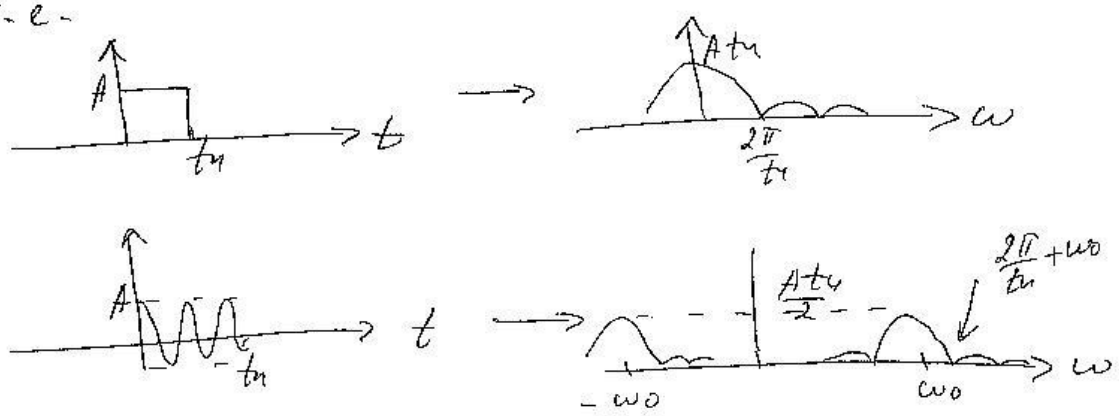
~~но~~ Използва се преобразуване на фурие от сигнал умножен с $\cos\omega_0 t$

$$F[s(t) \cdot \cos\omega_0 t] = \frac{1}{2}\dot{S}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\dot{S}(\omega+\omega_0) \Rightarrow$$

Транслиране на спектъра около ω_0 и $-\omega_0$.

Спектърът на $s_1(t)$ е намерен в зад. 6

Т.е.



Приложение:

Свойства на преобразуванията на Фурие

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = F[s(t)]$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = F^{-1}[S(\omega)]$$

1. Линейност

$$F\left[\sum_i s_i(t)\right] = \sum_i S_i(\omega)$$

2. Мащабиране

$$F[s(nt)] = \frac{1}{n} S\left(\frac{\omega}{n}\right)$$ – Разширяване във времева област $\Rightarrow$ стесняване в честотна и обратно

3. Закъснение (транслация във времева област)

$$F[s(t-\tau)] = S(\omega) \cdot e^{-j\omega\tau}$$ – не се променя АЧС, а само ФЧС

4. Диференциране сигнала

$$F\left[\frac{ds(t)}{dt}\right] = S(\omega) \cdot j\omega$$

5. Интегриране сигнал

$$F\left[\int s(t)\,dt\right] = \frac{\dot{S}(\omega)}{j\omega}$$

6. Произведение на сигнали

$$F[s_1(t)\cdot s_2(t)] = \frac{1}{2\pi}\left[\dot{S}_1(\omega) \overset{\text{конволюция}}{\otimes} \dot{S}_2(\omega)\right]$$ –

конволюция в честотна област

7. Конволюция на сигнали

$$F[s_1(t) \otimes s_2(t)] = \dot{S}_1(\omega)\cdot \dot{S}_2(\omega)$$ – произведение в честотна област

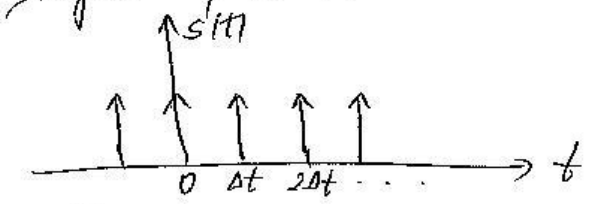
8. Произведение с хармонична функция (модулация)

$$F[s(t)\cdot \cos\omega_0 t] = \frac{1}{2}\dot{S}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\dot{S}(\omega+\omega_0)$$ –

транслация на спектъра около честоти ω_0 и $-\omega_0$.

Допълнителна задача:

Да се определи спектъра на периодична поредица от импулси на Дирак (Dirac comb).



Решение:

Периодичен сигнал → прилага се разлагане в ред на Фурие

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

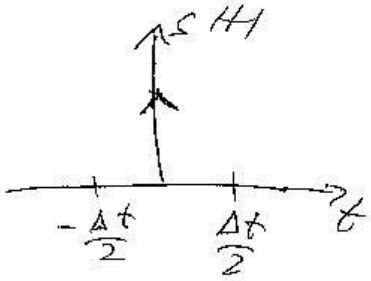
$$T = \Delta t \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{\Delta t}$$

$$C_k = \frac{1}{\Delta t}\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \underbrace{\delta(t)}_{\text{единичен импулс на Дирак}} \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{\Delta t}t}\,dt$$

Тъй като в интервала $-\frac{\Delta t}{2} \div \frac{\Delta t}{2}$ сигналът е нулев само при $t=0$, то

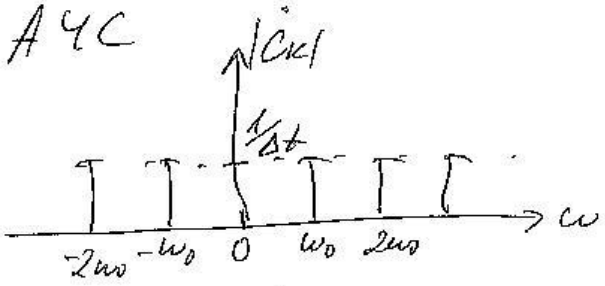
$$C_k = \frac{1}{\Delta t}\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \delta(t)\cdot e^{-j\frac{k2\pi\cdot 0}{\Delta t}}\,dt$$

$$C_k = \frac{1}{\Delta t}\underbrace{\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \delta(t)\,dt}_{=1 \text{ (площ на } \delta(t))}$$



$$C_k = \frac{1}{\Delta t}$$

АЧС



– резултат бъркан за дискретизация