



Технически университет - София

Борислав Доневски

**Математически методи  
за цифрова обработка**

(магистърска степен)

## ПРЕДГОВОР

"Нима поука си черпил само от тия, които са те обичали, подпомагали и са се възхищавали от тебе? Не ти ли дадоха повече ония, които се опълчиха срещу тебе и ти оспорваха пътя?"

Уолт Уолтман

Учебникът е предназначен за студентите от първи курс, магистърска степен на Факултета по електронна техника и технологии. Той е естествено продължение на материала по математика, изучаван в бакалавърската степен на същия факултет. Състои се от следните раздели.

Глава първа "Въведение в теорията на сигналите и системите (обзор)". Разглеждат се следните въпроси: дискретни във времето сигнали – комплексни редици, някои основни редици, периодични и непериодични редици, симетрични редици, математични операции с дискретни сигнали, декомпозиция на сигнали; дискретни във времето системи – основни свойства; конволюция; диференчни уравнения. Този материал е необходим за онези студенти и инженери, които изучават и прилагат математиката за цифрова обработка на сигналите (ЦОС) и системите.

Глава втора "Дискретни преобразувания". Разглеждат се следните въпроси: редове на Фурье, преобразуване на Фурье, право и обратно дискретно преобразуване на Фурье (ДПФ), изчислителна сложност на ДПФ, алгоритъм за БПФ с децимация по време, алгоритъм за БПФ с децимация по честота, обратно ДПФ, преобразуване на Уолш, преобразуване на Адамар. Този материал е необходим за онези студенти, които изучават ЦОС, паралелни изчисления, бързи алгоритми за конволюция.

Глава трета "Корелация и конволюция". Разглеждат се следните основни въпроси: корелация – взаимна корелация и автокорелация, бърза корелация; конволюция – кръгова конволюция, бърза линейна конволюция, методи за пресмятане на конволюция и корелация; реализиране на корелация и конволюция; деконволюция. Този материал е необходим за онези студенти, които изучават ЦОС и цифрова филтрация.

Глава четвърта "Синусово и косинусово преобразуване на Фурье". Разглеждат се основни въпроси от синусово и косинусово преобразуване на Фурье и техните ускорени версии, както и приложенията им.

Навсякъде материалът е илюстриран с многообразни примери.

Изказвам благодарност на рецензента доц. д-р Ганчо Венков за критичните бележки и полезни съвети при подготовката на окончателния вариант на ръкописа, а така също и на Мариана Недялкова за отличната текстообработка.

Септември, 2003г.

Авторът

## ГЛАВА 1

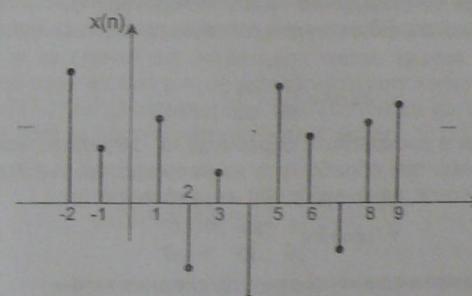
### ВЪВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЯТА НА СИГНАЛИТЕ И СИСТЕМИТЕ (ОБЗОР)

#### 1.1. Въведение

В тази глава ще започнем изучаването на обработката на цифрови сигнали, чрез разглеждане на понятието за дискретен сигнал и дискретна система. Ще се съсредоточим върху решаването на задачите, свързани с представянето на сигнали, тяхното обработване, свойствата на сигналите, класификация на системите. В точка 1.2 дефинираме точно какво се разбира под понятието "дискретен във времето сигнал" и след това развиваме някои основни, но важни операции, които могат да се извършат с тези сигнали. В точка 1.3 разглеждаме дискретни системи. От особена важност ще бъдат понятията линейност, инвариантност във времето, каузалност, устойчивост, обратимост. Ще бъде показано, че за линейни и инвариантни във времето системи, входът и изходът са свързани чрез сумата на конволюцията. Свойствата на сумата на конволюцията и методите за извършване на конволюции са разгледани в точка 1.4. Накрая в точка 1.5 разглеждаме дискретни системи, описани чрез диференчно уравнение.

#### 1.2. Дискретни сигнали

Дискретният сигнал е редица от реални или комплексни числа. Поради това дискретният сигнал е функция на една променлива, която има целочислени стойности и се означава с  $x(n)$ . Въпреки че, независимата променлива  $n$  не е задължително да бъде "времето" ( $n$ , например, може да се отнася за пространствена координата или разстояние),  $x(n)$  се разглежда като функция на времето. Дискретният сигнал е неопределен за нецелочислен стойности на  $n$ . Следователно, един сигнал  $x(n)$ , който има реални стойности, се представя графично като множество от отчети – фиг. 1.1.



Фиг. 1.1. Графично представяне на дискретния сигнал  $x(n)$

При някои задачи и приложения е удобно  $x(n)$  да се разглежда като вектор. При това положение последователните стойности  $x(0), \dots, x(N-1)$  често могат да се разглеждат като елементи на вектор-колона:

$$x = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T.$$

Дискретните сигнали често се получават чрез дискретизиране на непре-

където  $a$  може да бъде реално или комплексно число. От особен интерес е експоненциалната редица, получена когато  $a = e^{j\omega_0}$ , където  $\omega_0$  е реално число. В този случай  $x(n)$  е комплексна експонента

$$e^{jn\omega_0} = \cos(n\omega_0) + j\sin(n\omega_0).$$

Както ще видим в следващата глава, комплексните експоненти са полезни при разлагането на сигнали в ред на Фурье.

### 1.2.3. Дължина на сигнала

Обикновено дискретните сигнали могат да бъдат класифицирани в зависимост от тяхната продължителност или дължина. Например, една дискретна във времето редица има крайна дължина, ако е равна на нула за всички стойности на  $n$  извън крайния интервал  $[N_1, N_2]$ . Сигнали, които нямат крайна дължина, като функцията единичен скок и комплексната експонента, се наричат безкрайни редици. Безкрайните редици могат да се разделят на десни, леви или двустранни. Дясна редица е всяка безкрайна редица, която има стойност нула за всички стойности на  $n < n_0$ , където  $n_0$  е цяло число. Функцията единичен скок е пример за дясна редица. По подобен начин, една безкрайна редица  $x(n)$  се нарича лява, ако за някакво цяло число  $n_0$ ,  $x(n)=0$  за всяко  $n > n_0$ . Пример за лява редица е

$$x(n) = u(n-n_0) = \begin{cases} 1 & \text{за } n \leq 0, \\ 0 & \text{за } n > 0, \end{cases}$$

което представлява функцията обрънат във времето и закъснял единичен скок. Безкрайно дълъг сигнал, който не е нито десен, нито ляв, както е комплексната експонента, се нарича двустранна редица.

### 1.2.4. Периодични и непериодични редици

Един дискретен във времето сигнал винаги може да бъде класифициран като периодичен или непериодичен. Сигналът  $x(n)$  се нарича периодичен, ако за някакво положително реално цяло число  $N$  е изпълнено равенството

$$x(n) = x(n+N) \quad (1.1)$$

за всяко  $n$ . Това е все едно да се каже, че редицата се повтаря на всеки  $N$  отчета. Ако сигналът е периодичен с период  $N$ , то той е също периодичен и с период  $2N, 3N$  и за всички останали цели числа, кратни на  $N$ . Основният период, който ще означаваме с  $N$ , е най-малкото положително цяло число, за което уравнение (1.1) се удовлетворява. Ако (1.1) не се удовлетворява за всяко цяло число  $N$ ,  $x(n)$  се нарича непериодичен сигнал.

#### Пример 1.2.1. Сигналите

$$x_1(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n & \text{за } n \geq 0, \\ 0 & \text{за } n < 0 \end{cases}$$

и

$$x_2(n) = \cos(n^2)$$

не са периодични, докато сигналът

$$x_3(n) = j e^{jn\pi/16}$$

е периодичен и има основен период  $N = 16$ .

Ако  $x_1(n)$  е периодична редица с период  $N_1$ , а  $x_2(n)$  е друга периодична редица с период  $N_2$ , сумата

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

винаги ще бъде периодична и основният период е

Но не всички дискретни сигнали се получават по този начин. Някои сигнали са дискретни по природа, и при тях не се извършва аналогово-цифрово преобразуване. Примери за такива сигнали са ежедневните цени на стоковата борса, статистиките за населението и др.

#### 1.2.1. Комплексни редици

В общия случай дискретният сигнал е комплексен. При някои приложения, като цифровите комуникации например, комплексният сигнал се получава по естествен път. Той се състои от реална и имагинерна част

$$z(n) = a(n) + jb(n) = \operatorname{Re}\{z(n)\} + j\operatorname{Im}\{z(n)\},$$

или в полярни координати, чрез амплитудата и фазата му,

$$z(n) = |z(n)| \exp[j\arg\{z(n)\}].$$

Амплитудата може да се получи от реалната и имагинерната част по следния начин

$$|z(n)|^2 = \operatorname{Re}^2\{z(n)\} + \operatorname{Im}^2\{z(n)\},$$

а фазата с формулата

$$\arg\{z(n)\} = \arctg[\operatorname{Im}\{z(n)\}/\operatorname{Re}\{z(n)\}].$$

Ако  $z(n)$  е комплексна редица, комплексно спрегната редица  $z^*(n)$ , се получава с промяна знака на имагинерната част на  $z(n)$ :

$$z^*(n) = \operatorname{Re}\{z(n)\} - j\operatorname{Im}\{z(n)\} = |z(n)| \exp[-j\arg\{z(n)\}].$$

#### 1.2.2. Някои основни редици

Въпреки че, повечето сигнали, които носят информация и имат практическа значимост са сложни функции на времето, има три прости, но все пак важни дискретни сигнала, които често се използват при представянето и описание на по-сложни сигнали. Това са единичният отчет, единичният скок и експоненциалният сигнал. Единичният отчет, означен с  $\delta(n)$ , се дефинира по следния начин:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{за } n = 0, \\ 0 & \text{за } n \neq 0 \end{cases}$$

и играе същата роля в дискретната обработка на сигналите, каквато единичният импулс изпълнява при обработката на непрекъснат във времето сигнал. Функцията единичен скок, означена с  $u(n)$ , се дефинира така

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{за } n \geq 0, \\ 0 & \text{за } n < 0 \end{cases}$$

и е свързана с функцията единичен отчет по следния начин

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k).$$

По подобен начин, функцията единичен отчет може да се запише като разлика на два отчета:

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1).$$

Накрая експоненциалната редица се дефинира с израза

$$x(n) = a^n,$$

$$N = \frac{N_1 N_2}{\gcd(N_1, N_2)}, \quad (1.2)$$

където  $\gcd(N_1, N_2)$  е най-големият общ делител на  $N_1$  и  $N_2$ . Същото се отнася и за произведението

$$x(n) = x_1(n)x_2(n)$$

To ще бъде периодична редица с период  $N$ , изчислен с (1.2). Обаче основният период може да бъде по-малък.

Ако е дадена произволна редица  $x(n)$ , периодичният сигнал винаги може да се получи чрез повторение на  $x(n)$ , както следва:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n - kN),$$

където  $N$  е цяло положително число. В този случай  $y(n)$  ще бъде периодичен сигнал с период  $N$ .

### 1.2.5. Симетрични редици

Често дискретният във времето сигнал има някаква симетрия, която може да се използва за решаването на задачи. Интерес представляват два вида симетрии.

**Дефиниция:** Един реален сигнал, се нарича четен, ако за всяко  $n$  е изпълнено  $x(n)=x(-n)$ . Сигналът се нарича нечетен, ако за всяко  $n$  е изпълнено равенството  $x(n)=-x(-n)$ .

Всеки сигнал  $x(n)$  може да се представи като сума от четната  $x_e(n)$  и нечетната част  $x_o(n)$ , както следва

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n).$$

За да намерим четната част на  $x(n)$  образуваме сумата

$$x_e(n) = \frac{1}{2}\{x(n) + x(-n)\},$$

а за намиране на нечетната част образуваме разликата

$$x_o(n) = \frac{1}{2}\{x(n) - x(-n)\}.$$

За комплексните редици, симетриите, които представляват интерес, са малко по-различни.

**Дефиниция:** Един комплексен сигнал се нарича, комплексно симетричен, ако за всяко  $n$ :  $x(n)=x^*(-n)$ . Сигналът се нарича комплексно несиметричен, ако за всяко  $n$ :  $x(n)=-x^*(-n)$ .

Всеки произволен комплексен сигнал може да бъде представен като сума от комплексно симетричен сигнал и комплексно несиметричен сигнал.

### 1.2.6. Операции със сигнали

При изучаването на дискретни сигнали и системи ще се занимаваме с операции със сигнали. Обикновено тези операции се състоят от няколко основни преобразувания на сигнала. Те могат да се разглеждат като преобразуване на независимата променлива  $n$  или като преобразуване на амплитудата на  $x(n)$  (т.е. зависимата променлива). В следващите две подточки ще разгледаме накратко тези два вида преобразувания и ще отбележим тези, които се използват най-често.

#### Преобразуване на независимата променлива

Една често срещана операция е промяната на индекса  $n$

$$y(n) = x(f(n)),$$

където  $f(n)$  е някаква функция на  $n$ . Ако за някаква стойност на  $n$ ,  $f(n)$  не е цяло

число, то  $y(n)=x(f(n))$  не е дефинирана. Определянето на ефекта от промяната на индекса  $n$  винаги може да се осъществи като се използва таблица, където за всяка стойност на  $n$ , съответства стойността на  $f(n)$  и след това се замества в израза  $y(n)=x(f(n))$ . Обаче за много от преобразуванията на индекса, това не е необходимо и редицата може да бъде определена или начертана директно. Най-често използваните преобразувания са: преместване, обръщане, мащабиране, които са дефинирани по-долу.

**Преместване:** Това преобразуване се дефинира чрез израза  $f(n)=n-n_0$ . Ако  $y(n)=x(n-n_0)$  това означава, че редицата  $x(n)$  се премества надясно с  $n_0$  отчета, където  $n_0$  е положително число (нарича се закъснение). Ако  $n_0$  е отрицателно число, редицата се премества наляво с  $n_0$  отчета (нарича се изпредварване).

**Обръщане:** Това преобразуване се дава с израза  $f(n)=-n$  и представлява "преобръщане" на сигнала  $x(n)$  по отношение на индекса  $n$ .

**Мащабиране по време:** Това преобразуване се дефинира с израза  $f(n)=Mn$  или  $f(n)=n/N$ , където  $M$  и  $N$  са цели положителни числа. В първия случай редицата  $x(Mn)$  се получава като се вземе всеки  $M$ -ти отчет на  $x(n)$  (тази операция се нарича поддискретизиране). Във втория случай редицата  $y(n)=x(f(n))$  се дефинира по следния начин:

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{N}\right) & \text{за } n = 0, \pm N, \pm 2N, \dots, \\ 0 & \text{за останалите случаи.} \end{cases}$$

(Тази операция е известна като свърхдискретизиране).

Примери на преместване, обръщане и мащабиране по време са показани на фиг. 1.2.

Преместване, обръщане и мащабиране по време са операции, които зависят от реда на изпълнение. Затова трябва внимателно да се оценява реда на изпълнение на тези операции. На фиг. 1.3 са показани две системи, едната от които се състои от закъснение последвано от обръщане. Другата система е съставена от обръщане, следвано от закъснение. Както се вижда изходните сигнали на тези системи не са еднакви.

#### Събиране, Умножение и Мащабиране

**Събиране:** Сумата на два сигнала

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n), \quad -\infty < n < +\infty$$

се получава като сумираме стойностите на двата сигнала точка по точка (т.е. за всяка точка).

**Умножение:** Произведенietо на два сигнала

$$y(n) = x_1(n)x_2(n), \quad -\infty < n < +\infty$$

се получава като умножим стойностите на двата сигнала за всяка точка.

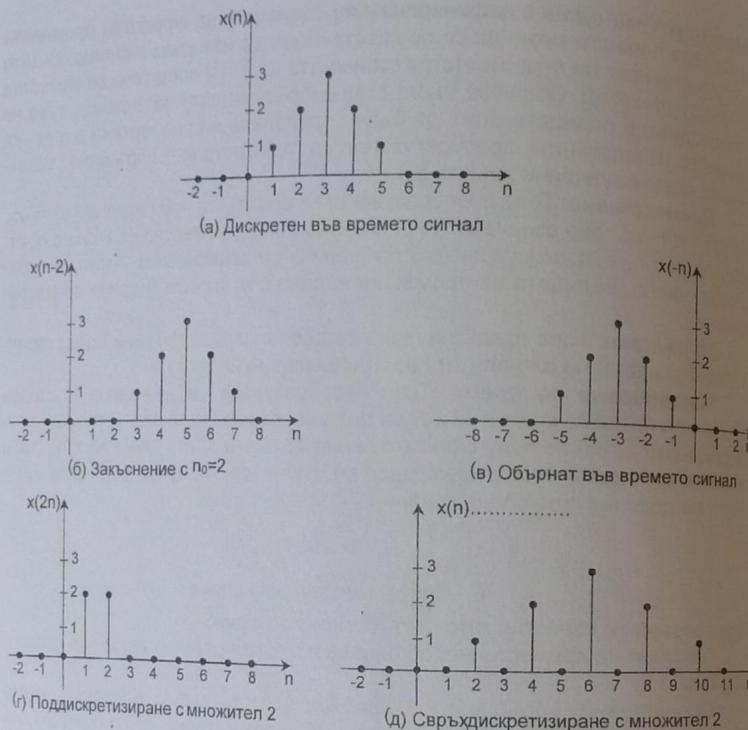
**Мащабиране:** Мащабиране амплитудата на сигнала  $x(n)$  с константа се получава, чрез умножение на всяка стойност на сигнала с константата  $c$

$$y(n) = cx(n), \quad -\infty < n < +\infty.$$

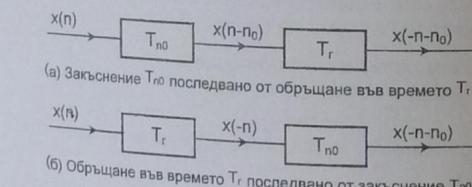
Тази операция може да се разглежда и като произведение на два сигнала,  $x(n)$  и  $f(n)=c$ .

### 1.2.7. Декомпозиция на сигнала

Един отчет може да се използва за представяне на произволен сигнал  $x(n)$  като сума от утегловени и преместени единични отчети, както следва



Фиг. 1.2. Илюстрация на операциите преместване, обръщане и мащабиране на независимата променлива  $n$



Фиг. 1.3. Пример, който илюстрира, че операциите закъснение и обръщане не са комутативни

$x(n) = \dots + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + \dots$

Декомпозицията може да се запише по следния начин

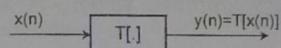
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k), \quad (1.3)$$

Където всяко събирамео  $x(k)\delta(n-k)$  представлява сигнал с амплитуда  $x(k)$  в момента  $n=k$  и има стойност 0 за всички останали стойности на  $n$ . Тази декомпозиция е дискретният вариант на свойството преместване на непрекъснат

ти във времето сигнали и се използва при получаване на сумата на конволюцията.

### 1.3. Дискретни във времето системи

Една дискретна във времето система е математически оператор или преобразуване, което трансформира един сигнал (входният) в друг сигнал (изходният) чрез използване на определена съвкупност правила или операции. Означението  $T[n]$  се използва за изобразяване на една обща система - фиг. 1.4, в която входният сигнал  $x(n)$  се преобразува в изходния сигнал  $y(n)$  чрез преобразуването  $T[n]$ . Входно-изходните свойства на системата могат да бъдат зададени по няколко начина.



Фиг. 1.4. Представяне на дискретна във времето система като преобразуване  $T[n]$ , което изобразява входен сигнал  $x(n)$  в изходен сигнал  $y(n)$

Връзката между входа и изхода може да се представи посредством математическо правило или функция, като например

$$y(n) = x^2(n)$$

или

$$y(n) = 0,5y(n-1) + x(n).$$

Обаче едно е да се опише една система чрез алгоритъм, който дава последователността от инструкции или операции, които да се извършат с входния сигнал, като например:

$$y_1(n) = 0,5y_1(n-1) + 0,25x(n),$$

$$y_2(n) = 0,25y_2(n-1) + 0,5x(n),$$

$$y_3(n) = 0,4y_3(n-1) + 0,5x(n),$$

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) + y_3(n).$$

В някои случаи, една система може да бъде еднозначно определена като се използва таблица, дефинираща множеството от всички възможни двойки входно/изходни сигнали, които представляват интерес.

Дискретните системи могат да бъдат класифирани според свойствата им. Най-често използвани са линейност, преместване във времето, каузалност, стабилност и обратимост. Тези свойства, заедно с още няколко други, са описани в следващата точка.

#### 1.3.1 Свойства на системите

Системи без памет

Първото свойство е свързано с наличието или отсъствието на памет в една система.

**Дефиниция:** Една система е система без памет, ако изходният сигнал във всеки момент от времето  $n=n_0$  зависи само от входния сигнал в момента  $n=n_0$ . Иначе казано, една система е без памет, ако за всяко  $n_0$  можем да определим стойността на  $y(n_0)$ , при дадена стойност на  $x(n_0)$ .

##### Пример 1.3.1. Системата

$$y(n) = x^2(n)$$

е система без памет, защото  $y(n_0)$  зависи само от стойността на  $x(n)$  в момента  $n_0$ .

Системата

$$y(n) = x(n) + x(n-1)$$

е система с памет, защото изходният сигнал в момента  $n_0$  зависи от стойността на входния сигнал в моментите  $n_0$  и  $n_0-1$ .

**Адитивност**

Адитивната система е такава система, за която реакцията на изхода при въздействието на сума от входните сигнали е равна на сумата от реакциите на отделните входни сигнали.

**Дефиниция:** Една система се нарича адитивна, ако

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = T[x_1(n)] + T[x_2(n)]$$

за произволни сигнали  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ .

**Хомогеност**

Една система е хомогенна, ако при мащабиране на входния сигнал с константа се получава мащабиране на изходния сигнал със същата константа.

**Дефиниция:** Една система е хомогенна, ако

$$T[cx(n)] = cT[x(n)]$$

за всяка комплексна константа "c" и за произволна входна редица  $x(n)$ .

**Пример 1.3.2.** Системата, дефинирана с израза

$$y(n) = \frac{x^2(n)}{x(n-1)}$$

не е адитивна, защото

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = \frac{[x_1(n) + x_2(n)]^2}{x_1(n-1) + x_2(n-1)},$$

което не е равносилно на израза

$$T[x_1(n)] + T[x_2(n)] = \frac{x_1^2(n)}{x_1(n-1)} + \frac{x_2^2(n)}{x_2(n-1)}.$$

Тази система е хомогенна, защото ако входният сигнал е  $c x(n)$ , то изходният сигнал е

$$T[cx(n)] = \frac{[cx(n)]^2}{cx(n-1)} = c \frac{x^2(n)}{x(n-1)} = c T[x(n)].$$

От друга страна, системата дефинирана с уравнението

$$y(n) = x(n) + x^*(n-1)$$

е адитивна, защото

$$[x_1(n) + x_2(n)] + [x_1(n-1) + x_2(n-1)]^* = [x_1(n) + x_1^*(n-1)] + [x_2(n) + x_2^*(n-1)].$$

Тази система обаче не е хомогенна, защото реакцията на входния сигнал  $c x(n)$  е

$$T[cx(n)] = cx(n) + c^*x^*(n-1),$$

$$cT[x(n)] = cx(n) + cx^*(n-1).$$

**Линейни системи**

Една система, която е едновременно адитивна и хомогенна се нарича линейна.

**Дефиниция:** Една система е линейна, ако

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)]$$

за два произволни входни сигнала  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  и за произволни комплексни константи  $a_1$  и  $a_2$ .

Свойството адитивност опростява значително пресмятането на реакцията на една система при въздействие на даден входен сигнал. Например, като се използва декомпозицията за  $x(n)$ , дадена с (1.3) и като се приложи свойството адитивност следва че изходният сигнал  $y(n)$  може да се запише по следния начин

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T[x(k)\delta(n-k)].$$

Тъй като кофициентите  $x(k)$  са константи, като използваме свойството хомогеност можем да запишем:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T[x(k)\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)]. \quad (1.4)$$

Ако приемем, че  $h_k(n)$  е реакцията на системата при въздействието на единичен отчет в момента  $n=k$ , тогава

$$h_k(n) = T[\delta(n-k)].$$

Формула (1.4) се преобразува във вида

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n). \quad (1.5)$$

Формула (1.5) е известна като сумиране чрез суперпозиция.

**Инвариантност на преместването**

Ако една система има следното свойство. При подаване на входен сигнал преместен (закъснял) с  $n_0$  дискретни единици, се получава изходен сигнал също с отместване  $n_0$ , системата се нарича инвариантна на преместването.

**Дефиниция:** Нека  $y(n)$  е реакцията на една система при подаване на произволен входен сигнал  $x(n)$ . Системата се нарича инвариантна на преместването, ако за всяко закъснение  $n_0$ , реакцията на  $x(n-n_0)$  е  $y(n-n_0)$ . Система, която не е инвариантна на преместването се нарича неинвариантна.

При това положение, една система е инвариантна, ако свойствата или характеристиките ѝ не се променят във времето. Ако те са еднакви за всеки произволен входен сигнал  $x(n)$  и за всички отмествания  $n_0$ , системата е инвариантна на преместването.

**Пример 1.3.3.** Системата дефинирана с израза

$$y(n) = x^2(n)$$

е инвариантна на преместването. Ако  $y(n) = x^2(n)$  е реакцията на системата при подаване на входния сигнал

$$x'(n) = x(n-n_0)$$

е

$$y'(n) = [x'(n)]^2 = x^2(n-n_0).$$

Тъй като  $y'(n) = y(n-n_0)$ , системата е инвариантна на преместването. Обаче системата описана с уравнението

$$y(n) = x(n) + x(-n)$$

е инвариантна на преместването. Забележете, че реакцията на системата на входния сигнал  $x(n)=\delta(n)$  е

$$y(n)=\delta(n)+\delta(-n)=2\delta(n),$$

докато реакцията на  $x(n-1)=\delta(n-1)$  е

$$y(n)=\delta(n-1)+\delta(-n-1).$$

Тъй като това е равно на  $y(n-1)=2\delta(n-1)$ , системата е инвариантна на преместването.

#### Линейни инвариантни на преместването системи

Една система, която е едновременно линейна и инвариантна на преместването се нарича линейна инвариантна на преместването система (ЛИВ). Ако  $h(n)$  е реакцията на ЛИВ система при подаване на единичен отчет  $\delta(n)$ , реакцията ѝ на  $\delta(n-k)$  ще бъде  $h(n-k)$ . Следователно, ако сумата на суперпозиции, дадена с уравнение (1.5) е

$$h_k(n)=h(n-k),$$

изходният сигнал ще бъде

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k). \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6), известно като сума на конволюцията, се записва във вида:

$$y(n)=x(n)*h(n),$$

където с '\*' е отбелаязан операторът за конволюция. Редицата  $h(n)$ , наречена реакция при въздействието на единичен отчет дава пълна представа за една ЛИВ система. С други думи, реакцията на системата на всеки входен сигнал  $x(n)$  може да бъде намерена, ако  $h(n)$  е известна редица.

#### Каузалност

Това свойство на системата е важно за приложения, които работят в реално време.

**Дефиниция:** Една система е каузална, ако за произволно  $n_0$ , реакцията на системата в момента  $n_0$  зависи само от входния сигнал до момента  $n=n_0$ .

За една каузална система, измененията на изходния сигнал не могат да изпреварват (предходжат) промените на входния сигнал. При това положение, ако  $x_1(n)=x_2(n)$  за  $n \leq n_0$ , сигналът  $y_1(n)$  трябва да бъде равен на  $y_2(n)$  за  $n \leq n_0$ . Поради тази причина каузалните системи се разглеждат като системи, в които няма изпреварване. Една ЛИВ система ще бъде каузална, тогава и само тогава, когато  $h(n)=0$  за  $n < 0$ .

**Пример 1.3.4.** Системата описана с уравнението  $y(n)=x(n)+x(n-1)$  е каузална, защото стойността на изходния сигнал в произволен момент  $n=n_0$  зависи само от входния сигнал  $x(n)$  в момента  $n_0$  и момента  $n_0-1$ . Системата, описана с уравнението  $y(n)=x(n)+x(n+1)$  не е каузална, защото изходният сигнал в момента  $n=n_0$  се определя от стойността на входния сигнал в момента  $n_0+1$ .

#### Стабилност

При много приложения е важно системата да има реакция на изхода  $y(n)$ , чиято амплитуда е ограничена, когато входният сигнал е ограничен. Система, която притежава това свойство се нарича стабилна, или накратко ограничена вход – ограничен изход (the bounded input – bounded output (BIBO)).

**Дефиниция:** Една система е стабилна от вида ограничен вход – ограничен изход, ако за всеки ограничен входен сигнал  $|x(n)| \leq A < \infty$  изходният сигнал е ограничен, т.е.

$$|y(n)| \leq B < \infty.$$

За една линейна инвариантна система, стабилността се гарантира, ако реакцията на единичен отчет е абсолютно сумирамеа

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty. \quad (1.7)$$

**Пример 1.3.5.** Реакцията на една ЛИВ система при въздействието на единичен отчет е  $h(n)=a^n \cdot u(n)$ . Системата е стабилна когато  $|a|<1$ , защото:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} \quad \text{за } |a|<1.$$

Системата, описана с уравнението  $y(n)=p \cdot x(n)$  не е стабилна, защото реакцията при подаване на единичен скок  $x(n)=u(n)$  е  $y(n)=p \cdot u(n)$ , която е неограничена редица.

#### Обратимост

Обратимостта е важно свойство на системите в такива приложения като изравнител на сигнала в канал или деконволюция. Една система е обратима, когато входният сигнал на системата може да бъде еднозначно определен ако е известен изходният сигнал. За да бъде системата обратима трябва при подаване на различни входни сигнали да се получават различни изходни сигнали. Например, ако са дадени два входни сигнала  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ , за които  $x_1(n) \neq x_2(n)$ , трябва за изходните сигнали да е изпълнено условието  $y_1(n) \neq y_2(n)$ .

**Пример 1.3.6.** Системата, дефинирана с уравнението

$$y(n)=x(n)g(n)$$

е обратима, тогава и само тогава, когато  $g(n) \neq 0$  за всяко  $n$ . В частност, при даден входен сигнал  $y(n)$  и  $g(n) \neq 0$  за всяко  $n$ ,  $x(n)$  може да се получи от  $y(n)$  по следната формула

$$x(n)=\frac{y(n)}{g(n)}.$$

#### 1.4. Конволюция

Връзката между входния сигнал на една линейна инвариантна система  $x(n)$  и изходния сигнал  $y(n)$  се дава със сумата на конволюцията

$$x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k).$$

Тъй като конволюцията е важно понятие за анализа и описание на ЛИВ системи, в тази точка ще бъдат разгледани операциите за извършване на конволюции. В началото ще бъдат дадени някои свойства на конволюцията, които могат да се използват за опростяване на сумата на конволюцията.

##### 1.4.1 Свойства на конволюцията

Конволюцията е линеен оператор и следователно има няколко важни свойства като комутативност, асоциативност и дистрибутивност. Дефинициите

и представянето на тези свойства е показано по-долу.

#### Свойството комутативност

Свойството комутативност означава, че реда за извършване на конволюцията на две редици не е от значение. Записано с математически израз то се изразява така:

$$x(n) * y(n) = y(n) * x(n).$$

От гледна точка на системата, според това свойство една система с реакция на единичен отчет  $h(n)$  и входен сигнал  $x(n)$  реагира точно както и система с реакция на единичен отчет  $x(n)$  и входен сигнал  $h(n)$ . Това е показано на фиг. 1.5a.



Фиг. 1.5. Интерпретация на свойства на конволюцията от гледна точка на системата

#### Свойството асоциативност

Операторът конволюция удовлетворява свойството асоциативност, което е

$$\{x(n)*h_1(n)\} * h_2(n) = x(n) * \{h_1(n) * h_2(n)\}.$$

От гледна точка на системата, според това свойство, ако две системи имат реакция на единичен отчет  $h_1(n)$  и  $h_2(n)$ , и са свързани последователно, както на фиг. 1.5б, еквивалентната система ще има реакция на единичен отчет равна на конволюцията на  $h_1(n)$  и  $h_2(n)$

$$h_{eq} = h_1(n) * h_2(n)$$

#### Свойството дистрибутивност

Свойството дистрибутивност на оператора конволюция удовлетворява равенството

$$x(n) * \{h_1(n) + h_2(n)\} = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n).$$

От гледна точка на системата, според това свойство, ако две системи с реакции на единичен отчет  $h_1(n)$  и  $h_2(n)$  са свързани паралелно, както на фиг. 1.5в, еквивалентната система ще има реакция на единичен отчет равна на сумата от  $h_1(n)$  и  $h_2(n)$

$$h_{eq} = h_1(n) + h_2(n).$$

#### 1.4.2 Извършване на конволюция

След като бях разгледани някои от свойствата на оператора конволю-

ция ще разгледаме начините на извършване на конволюции. Съществуват няколко различни метода, които могат да се използват, като най-лесният от тях зависи от формата и типа на редиците, които участват.

#### Непосредствено пресмятане

Когато редиците, с които се извършва конволюцията могат да се опишат с прости математически изрази с т.нар. затворена форма, конволюцията най-лесно може да се извърши чрез директно пресмятане на сумата, дадена с уравнение (1.6). При директно извършване на конволюция обикновено трябва да се пресметнат крайни или безкрайни суми, които съдържат членове от типа  $a^n$  или  $na^n$ . В табл. 1-1 са дадени математическите изрази за някои от почесто срещаните редове.

Таблица 1-1. Суми на някои често срещани редове

$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad  a  < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2} \quad  a  < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2} N(N-1)$	$\sum_{n=0}^{\infty} n = \frac{1}{6} N(N-1)(2N-1)$

Пример 1.4.1. Да се пресметне конволюцията на двата сигнала

$$x(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n & \text{за } n \geq 0, \\ 0 & \text{за } n < 0 \end{cases}$$

$$h(n) = u(n).$$

Непосредственото пресмятане на сумата на конволюцията е

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k)u(n-k).$$

Тъй като  $u(k)$  е равна на 0 за всяко  $k < 0$  и  $u(n-k)$  е 0 за всяко  $k > n$ , то когато  $n < 0$  няма ненулеви членове в сумата и  $y(n)=0$ . Ако  $n \geq 0$ , тогава

$$y(n) = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Следователно

$$y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u(n).$$

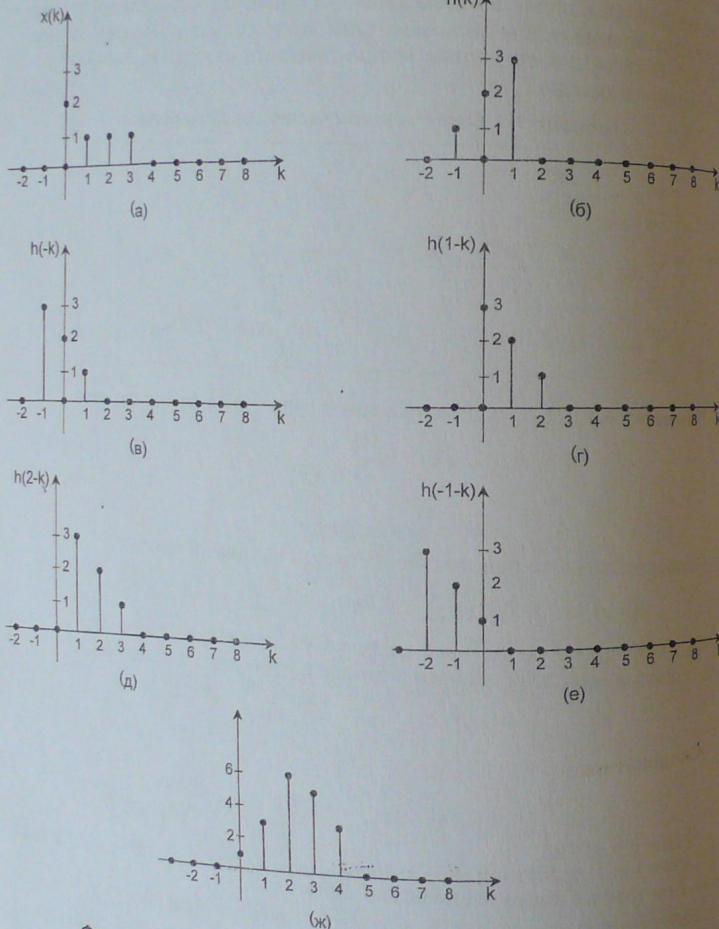
#### Графичен метод

Освен чрез директния метод, конволюции могат да се извършват и графично. При този метод се извършват следните стъпки.

1. Начертаване на двете редици  $x(k)$  и  $h(k)$  като функции на  $k$ .
2. Избира се една от двете редици, например  $h(k)$ , и тя се обръща във времето, за да се получи редицата  $h(-k)$ .
3. Извества се обрънатата във времето редица с  $n$  отчета. [Ако  $n > 0$  това съответства на изместване надясно (закъснение), а ако  $n < 0$  това съответства на изместване наляво (изпреварване)].

4. Умножават се двете редици  $x(k)$  и  $h(n-k)$  и се сумират произведенията за всяка стойност на  $k$ . Получената стойност е равна на  $y(n)$ . Този процес се повтаря за всички възможни премествания.

**Пример 1.4.2.** За да се илюстрира графичния метод за конволюция нека пресметнем  $y(n)=x(n)*h(n)$ , където  $x(n)$  и  $h(n)$  са редиците, показани на фиг. 1.6а и 1.6б. За извършване на тази конволюция се следват стъпките дадени по-нагоре в текста.



Фиг. 1.6. Графичен метод за пресмятане на конволюцията

1. Тъй като  $x(k)$  и  $h(k)$  са начертани като функции на  $k$  – фиг. 1.6а и фиг. 1.6б, то следващата стъпка е да изберем една от редиците, за да я обърнем във времето. В този пример ще обърнем  $h(k)$ , както е показано

на фиг. 1.6в.

2. Образува се произведението  $x(k).h(-k)$  и се сумират тези произведения по отношение на  $k$  и получаваме, че  $y(0)=1$ .

3. Изместваме  $h(k)$  надясно с един отчет и получаваме редицата  $h(1-k)$ , показана на фиг. 1.6г. Образува се произведението  $x(k).h(1-k)$  и след сумиране по  $k$  на тези произведения получаваме, че  $y(1)=3$ .

4. Изместваме  $h(1-k)$  надясно с още една позиция и получаваме редицата  $h(2-k)$ , показана на фиг. 1.6д. Образува се произведението  $x(k).h(2-k)$  и сумираме произведенията по  $k$ . Получаваме, че  $y(2)=6$ .

5. Като се продължава по този начин се получава, че  $y(3)=5$ ,  $y(4)=3$  и  $y(n)=0$  за  $n>4$ .

6. След това взимаме редицата  $h(-k)$  и я преместваме наляво, както е показано на фиг. 1.6е. Тъй като произведението  $x(k).h(-1-k)$  е 0 за всяко  $k$ , получаваме, че  $y(-1)=0$ . Всъщност,  $y(n)=0$  за всяко  $n<0$ .

На фиг. 1.6ж е показана конволюцията за всички стойности на  $n$ .

Един полезен извод при извършване на конволюция на две редици с крайна дължина  $e$ , че ако  $x(n)$  е с дължина  $L_1$ , а  $h(n)$  е с дължина  $L_2$ ,  $y(n)=x(n)*h(n)$  ще има дължина

$$L = L_1 + L_2 - 1.$$

Ако ненулевите стойности на  $x(n)$  се намират в интервала  $[M_x, N_x]$ , а ненулевите стойности на  $h(n)$  – в интервала  $[M_h, N_h]$ , то ненулевите стойности на  $y(n)$  ще бъдат заключени в интервала  $[M_x+M_h, N_x+N_h]$ .

**Пример 1.4.3.** Да разгледаме конволюцията на редиците

$$x(n)=\begin{cases} 1 & \text{за } 10 \leq n \leq 20, \\ 0 & \text{за останалите случаи;} \end{cases}$$

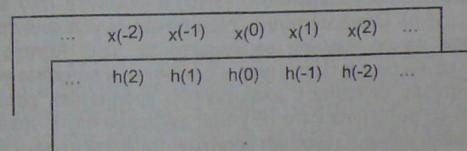
$$h(n)=\begin{cases} n & \text{за } -5 \leq n \leq 5, \\ 0 & \text{за останалите случаи.} \end{cases}$$

Понеже  $x(n)$  е нула извън интервала  $[10, 20]$ , а  $h(n)$  е нула извън интервала  $[-5, 5]$ , ненулевите стойности на конволюцията  $y(n)=x(n)*h(n)$  ще бъдат в интервала  $[5, 25]$ .

#### Метод с припълзване

Съществува друг метод за извършване на конволюции, наречен метод с припълзване. Той е доста удобен в случаи, когато и двете редици  $x(n)$  и  $h(n)$  са с крайна дължина и малка продължителност. Стъпките, които се изпълняват при този метод са следните:

1. Записваме стойностите на  $x(k)$  в горната част на листа, а стойностите на  $h(-k)$  – в горната част на друг лист, както е показано на фиг. 1.7.



Фиг. 1.7. Пресмятане на конволюцията чрез метода с припълзване

- Поставяме стойностите на двете редици  $x(0)$  и  $h(0)$  една над друга, умножаваме всяка двойка числа и събираме произведенията, за да получим стойността на  $y(0)$ .
- Пътгаме листа с обрънатата редица  $h(k)$  надясно, умножаваме всяка двойка числа, сумираме произведенията, за да получим стойността на  $y(1)$  и след това повтаряме за всички премествания надясно с  $n > 0$ . По същия начин се постъпва и при пътгване наляво, за да се получат стойностите  $y(n)$  за  $n < 0$ .

### 1.5. Диференчни уравнения

Сумата на конволюцията представлява изходния сигнал на линейна инвариантна във времето (ЛИВ) система като линейна комбинация на стойностите на входния сигнал  $x(n)$ . Например, една система, която има реакция при въздействието на единния отчет  $h(n) = a^n \cdot u(n)$  се описва с уравнението

$$y(n) = \sum_{k=0}^n a^k x(n-k). \quad (1.8)$$

Въпреки, че това уравнение дава възможност да се изчисли изходният сигнал  $y(n)$  при произволен входен сигнал  $x(n)$ , от изчислителна гледна точка това представяне не е много ефективно. В някои случаи е възможно да се изрази по-ефективно изходният сигнал чрез стойностите му в минали моменти и стойностите в настоящия и минали моменти на входния сигнал. Предходната система, например, може да се опише по-кратко по следния начин

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) \quad (1.9)$$

Уравнение (1.9) е специален вид, известен като линейно диференчно уравнение с постоянни кофициенти (ЛДУПК). Общий вид на тези уравнения е

$$y(n) = \sum_{k=0}^q b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^p a(k)y(n-k), \quad (1.10)$$

където кофициентите  $a(k)$  и  $b(k)$  са константи, които определят системата. Ако диференчното уравнение има един или повече члена  $a(k)$ , които са ненулеви, диференчното уравнение се нарича рекурсивно. От друга страна, ако всички кофициенти  $a(k)$  са нула, диференчното уравнение се нарича нерекурсивно. Уравнение (1.9) е пример за рекурсивно диференчно уравнение от първи ред, докато уравнение (1.8) е нерекурсивно диференчно уравнение от безкраен ред.

Диференчните уравнения представляват метод за изчисляване реакцията на една система  $y(n)$  при произволен входен сигнал  $x(n)$ . Преди обаче да бъдат решени тези уравнения е необходимо да се определи множество от начинни условия. Например, при входен сигнал  $x(n)$ , който е подаден в момента  $n=0$ , решението на уравнението (1.10) в момента  $n=0$  зависи от стойностите на  $y(-1), \dots, y(-p)$ . Следователно, тези начинни условия трябва да бъдат определени преди да се намери решението за  $n \geq 0$ . Когато тези начинни условия са нула, казва се, че системата е при нулеви начинни условия.

За ЛИВ система, описана с диференчно уравнение, реакцията на единичния отчет  $h(n) = y(n)$  се получава като се реши диференчното уравнение за  $x(n) = \delta(n)$ , предполагайки нулеви начинни условия. За една нерекурсивна система  $a(k)=0$ . Диференчното уравнение се преобразува по следния начин

$$y(n) = \sum_{k=0}^q b(k)x(n-k) \quad (1.11)$$

а изходният сигнал е утегловена сума от стойностите на входния сигнал в настоящия и минали моменти. В резултат, реакцията на единичния отчет е

$$h(n) = \sum_{k=0}^q b(k)\delta(n-k).$$

Тогава  $h(n)$  е редица с крайна дължина и системата се нарича система с крайна импулсна характеристика (КИХ). Ако  $a(k) \neq 0$ , реакцията на единичен отчет, в общия случай, има безкрайна дължина и се нарича система с безкрайна импулсна характеристика (БИХ). Например, ако

$$y(n) = a.y(n-1) + x(n)$$

реакцията на единичния отчет е  $h(n) = a^n \cdot u(n)$ .

Съществуват няколко различни метода, които могат да се използват за решаване на ЛДУПК при входен сигнал  $x(n)$ . Първият се състои в създаване на таблица, съдържаща стойностите на входните и изходните сигнали, и пресмятане на диференчното уравнение за всяка стойност на  $n$ . Този подход бил подходящ, ако трябва да се определят само няколко стойности на изходния сигнал. Друг подход е да се използва z-преобразуването. Съществува и т. нар. класически метод. При него се намират поотделно решението на хомогенното уравнение и частните решения, които сега ще илюстрираме.

Нека е дадено ЛДУПК. Общото решение е сума от две части

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n),$$

където  $y_h(n)$  се нарича хомогенно решение, а  $y_p(n)$  се нарича частно решение. Хомогенното решение е реакцията на системата при съществуващите начинни условия, като се приема, че входния сигнал  $x(n) = 0$ . Частното решение е реакцията на системата при прилагане на входен сигнал и нулеви начинни условия.

Хомогенното решение се намира като се реши хомогенното диференчно уравнение,

$$y(n) + \sum_{k=1}^p a(k)y(n-k) = 0. \quad (1.12)$$

Решението на уравнението (1.12) може да се намери, като се приеме решение от вида

$$y_h(n) = z^n.$$

Като се замести това решение в (1.12) се получава уравнението от полиномен тип,

$$z^n + \sum_{k=0}^p a(k)z^{n-k} = 0$$

или

$$z^{n-p} \{ z^p + a(1)z^{p-1} + a(2)z^{p-2} + \dots + a(p-1)z + a(p) \} = 0.$$

Полиномът в скобите се нарича характеристичен полином. Понеже е от степен  $p$ , този полином ще има  $p$  корена, които могат да бъдат реални или комплексни. Ако кофициентите  $a(k)$  са реални числа, тези корени ще бъдат комплексно спретнати двойки (за всеки комплексен корен  $z$ , ще има друг ко-

рен, равен на  $z_i$ ). Ако  $p$  на брой корени  $z_i$  са различни,  $z_i \neq z_k$  за  $k \neq i$ , общото решение на хомогенното диференчно уравнение е

$$y_h(n) = \sum_{k=1}^p A_k z_k^n, \quad (1.13)$$

където константите  $A_k$  са избрани така, че да удовлетворяват началните условия. За многократни корени, решението трябва да се видоизмени както следва. Ако  $z_1$  е корен с кратност  $m$ , а останалите  $p-m$  корена на уравнението са различни, хомогенното решение ще бъде

$$y_h(n) = (A_1 + A_2 n + \dots + A_m n^{m-1}) z_1^n + \sum_{k=m+1}^p A_k z_k^n. \quad (1.14)$$

За частното решение е необходимо да се намери редицата  $y_p(n)$ , която удовлетворява диференчното уравнение за даден сигнал  $x(n)$ . Това изиска известна изобретателност и проницателност. В табл. 1-2 са дадени частните решения за някои често срещани входни сигнали. Например, ако  $x(n)=a^n u(n)$ , частното решение ще бъде

$$y_p(n) = C a^n u(n),$$

при положение, че  $a$  не е корен на характеристичното уравнение. Константата  $C$  се определя като заместването в диференчното уравнение. Забележете, че за  $x(n)=C \delta(n)$  частното решение е нула. Понеже  $x(n)=0$  за  $n>0$ , единичният отчет оказва влияние само върху началното условие на  $y(n)$ .

Таблица 1-2. Частно решение на ЛДУПК за различни входни сигнали

$x(n)$	Частно решение
$C$	$C_T$
$Cn$	$C_1 n + C_2$
$Ca^n$	$C_1 a^n$
$C \cos(n\omega_0)$	$C_1 \cos(n\omega_0) + C_2 \sin(n\omega_0)$
$C \sin(n\omega_0)$	$C_1 \cos(n\omega_0) + C_2 \sin(n\omega_0)$
$C a^n \cos(n\omega_0)$	$C_1 a^n \cos(n\omega_0) + C_2 a^n \sin(n\omega_0)$
$C \delta(n)$	няма

Пример 1.5.1. Нека намерим решението на диференчното уравнение за  $x(n)=u(n)$ , като за начални условия приемем  $y(-1)=1$  и  $y(-2)=0$ .  
Започваме с определяне на частното решение. От табл. 1-2 се вижда, че за  $x(n)=u(n)$

$$y_p(n) = C_1.$$

След заместване на това решение в диференчното уравнение получавме

$$C_1 - 0,25 C_1 = 1,$$

За да бъде изпълнено тъждеството, трябва

$$C_1 = \frac{1}{1-0,25} = \frac{4}{3}.$$

За да намерим хомогенното решение, заместваме  $y_h(n)=z^n$ . Характеристичният полином е

$$z^2 - 0,25 = 0$$

или

$$(z+0,5)(z-0,5) = 0.$$

Следователно хомогенното решение има вида

$$y_h(n) = A_1(0,5)^n + A_2(-0,5)^n.$$

Общото решение е:

$$y_t(n) = \frac{4}{3} + A_1(0,5)^n + A_2(-0,5)^n, \quad n \geq 0. \quad (1.16)$$

Константите  $A_1$  и  $A_2$  трябва да бъдат определени така, че общото решение да удовлетворява началните условия  $y(-1)=1$  и  $y(-2)=0$ . Тъй като решението, дадено с уравнението (1.16) се отнася само за  $n \geq 0$ , трябва да получим еквивалентно множество от начални условия за  $y(0)$  и  $y(1)$ . Пресмятаме уравнение (1.15) за  $n=0$  и  $n=1$ , и получаваме

$$y(0) - 0,25 y(-2) = x(0) = 1,$$

$$y(1) - 0,25 y(-1) = x(1) = 1.$$

След заместване на така получените начални условия в уравнение (1.16) имаме

$$y(0) = \frac{4}{3} + A_1 + A_2 = 1,$$

$$y(1) = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} A_1 - \frac{1}{2} A_2 = 1.$$

Решаваме системата относно  $A_1$  и  $A_2$  и получаваме

$$A_1 = -\frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{6}.$$

Решението е:

$$y(n) = \frac{4}{3} - (0,5)^{n-1} + \frac{1}{6}(0,5)^n, \quad n \geq 0.$$

Въпреки, че досега разглеждахме по-специално ЛДУПК, не всички системи и не всички диференчни уравнения от практически интерес са линейни, и не всички имат постоянни коефициенти. Една система, която изчислява средната стойност на сигнала  $x(n)$  в интервала  $[0, n]$ , например, се дефинира с израза

$$y(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x(k), \quad n \geq 0.$$

Тази система може да се представи с диференчно уравнение, чиито коефициенти се променят във времето:

$$y(n) = \frac{n}{n+1} y(n-1) + x(n), \quad n \geq 0.$$

Въпреки, че са по-сложни и трудни за решаване нелинейните диференчни уравнения или диференчните уравнения с променливи във времето коефициенти са важни и възникват често в много приложения.

Дискретни сигнали

1.1 Определете дали сигналите са периодични или непериодични и за всеки периодичен сигнал определете основния период.

(a)  $x(n) = \cos(0,125\pi n)$ ,

(b)  $x(n) = \operatorname{Re}\{e^{jn\pi/12}\} + \operatorname{Im}\{e^{jn\pi/18}\}$ ,

(c)  $x(n) = \sin(\pi + 0,2n)$ ,

(d)  $x(n) = e^{j\frac{\pi}{16}n} \cdot \cos(n\pi/17)$ .

(a) Тъй като  $0,125\pi = \pi/8$ , и

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}(n-16)\right),$$

$x(n)$  е периодичен сигнал с период  $N=16$ .

(b) В този случай имаме сума на два периодични сигнала

$$x(n) = \cos(n\pi/12) + \sin(n\pi/8),$$

като периодът на първия сигнал е  $N_1=24$ , а на вторият е  $N_2=36$ . Следователно, периодът на сумата е

$$N = \frac{N_1 N_2}{\gcd(N_1, N_2)} = \frac{(24)(36)}{\gcd(24, 36)} = \frac{(24)(36)}{(12)} = 72$$

(c) За да бъде тази редица периодична, трябва да можем да определим такава стойност за  $N$ , че да бъде изпълнено тъждеството

$$\sin(\pi + 0,2n) = \sin(\pi + 0,2(n+N)).$$

Функцията синус е периодична с период  $2\pi$ . Следователно,  $0,2N$  трябва да бъде цяло число, кратно на  $2\pi$ . Но, тъй като  $\pi$  е ирационално число, няма такова цяло число  $N$ , което да удовлетворява равенството. Така, че тази редица е непериодична.

(d) В този случай имаме произведение на две периодични редици с периода  $N_1=32$  и  $N_2=34$ . Основният период е

$$N = \frac{(32)(34)}{\gcd(32, 34)} = \frac{(32)(34)}{2} = 544$$

1.2 Намерете четната и нечетната част на следните сигнали

(a)  $x(n) = u(n)$ ,

(b)  $x(n) = \alpha^n u(n)$ .

Четната част на сигнала  $x(n)$  е дадена с израза

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)].$$

За  $x(n)=u(n)$  имаме

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[u(n) + u(-n)] = \begin{cases} 1 & \text{за } n=0, \\ \frac{1}{2} & \text{за } n \neq 0, \end{cases}$$

което може да се запише съкратено по следния начин

$$x_e(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta(n).$$

При това положение, четната част на единичния скок е редица, която има константна стойност  $1/2$  за всяко  $n \neq 0$ , където има стойност 1. Нечетната част на сигнала  $x(n)$  се дава с разликата

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)].$$

За  $x(n)=u(n)$  имаме

$$x_o(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{за } n > 0, \\ 0 & \text{за } n = 0, \\ -\frac{1}{2} & \text{за } n < 0, \end{cases}$$

или

$$x_o(n) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(n),$$

където  $\operatorname{sgn}(n)$  е функцията сигнум.

За  $x(n)=\alpha^n u(n)$  четната част е

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[\alpha^n u(n) + \alpha^{-n} u(-n)] = \begin{cases} \frac{1}{2} \alpha^n & \text{за } n > 0, \\ 1 & \text{за } n = 0, \\ \frac{1}{2} \alpha^{-n} & \text{за } n < 0, \end{cases}$$

или

$$x_e(n) = \frac{1}{2} \alpha^{|n|} + \frac{1}{2} \delta(n).$$

Нечетната част е

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[\alpha^n u(n) - \alpha^{-n} u(-n)] = \frac{1}{2}[\alpha^{|n|} \operatorname{sgn}(n)].$$

1.3 Ако  $x_1(n)$  е четна редица, а  $x_2(n)$  е нечетна редица, какъв е сигналът  $y(n)=x_1(n).x_2(n)$ ?

Ако  $y(n)=x_1(n).x_2(n)$ , тогава

$$y(-n) = x_1(-n).x_2(-n).$$

Тъй като  $x_1(n)$  е четна функция,  $x_1(n)=x_1(-n)$ , а понеже  $x_2(n)$  е нечетна функция,  $x_2(n)=-x_2(-n)$ . Следователно

$$y(-n) = -x_1(n).x_2(n) = -y(n).$$

От този резултат следва, че  $y(n)$  е нечетна функция.

1.4 Ако  $x(n)=0$  за  $n < 0$ , да се намери израз за  $x(n)$ , представена чрез четната му част,  $x_e(n)$ , и като се използва този израз, да се определи  $x(n)$  при  $x_e(n)=(0,9)^{|n|} u(n)$ . Определете дали може да се получи подобен израз за  $x(n)$ , изразен чрез нечетната му част.

Понеже

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x(-n)],$$

и  
когато  $x(n)=0$  за  $n<0$

$$x_e(n) = \frac{1}{2} x(n) \text{ за } n>0$$

$$x_e(n) = x(n) \text{ за } n=0.$$

и  
Оттук следва, че  $x(n)$  може да се получи, ако се знае четната му част

$$x(n) = \begin{cases} x_e(n) & \text{за } n=0, \\ 2x_e(n) & \text{за } n>0. \end{cases}$$

Например, при  $x_e(n)=(0.9)^{|n|}$   $u(n)$  се получава

$$x(n) = \delta(n) + 2(0.9)^n u(n-1).$$

За разлика от случая, когато само четната част на редицата е известна, то ако е известна само нечетната част не е възможно да се получи  $x(n)$ . Проблемът е в получаване на стойността на  $x(0)$ . Понеже  $x_0(0)$  е винаги 0, в нечетната част не се съдържа информация за стойността на  $x(0)$ . Но, в случай, че е дадена стойността  $x(0)$  заедно с нечетната част, тогава  $x(n)$  може да се получи за всяко  $n$ .

1.5 Ако  $x_e(n)$  е спрегнатата симетрична част на редицата  $x(n)$ , каква е симетрията на реалната и имагинерната част на  $x_e(n)$ ?

Спрегнатата симетрична част на  $x(n)$  е

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)].$$

При представяне на  $x(n)$  чрез реалната и имагинерната част се получава

$$\begin{aligned} x_e(n) &= \frac{1}{2} [x_r(n) + jx_i(n) + \{x_r(-n) + jx_i(-n)\}^*] = \frac{1}{2} [x_r(n) + jx_i(n) + \\ &+ x_r(-n) - jx_i(-n)] = \frac{1}{2} [x_r(n) + x_r(-n)] + \frac{1}{2} j[x_i(n) - x_i(-n)]. \end{aligned}$$

Следователно, реалната част на  $x_e(n)$  е четна, а имагинерната част е нечетна.

1.6 Определете спрегнатата симетрична част на редицата

$$x(n) = je^{jn\pi/4}.$$

Спрегнатата симетрична част на  $x(n)$  е

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)] = \frac{1}{2} [je^{jn\pi/4} - je^{-jn\pi/4}] = 0.$$

При това положение тази редица е спрегната и несиметрична.

1.7 Дадена е редицата  $x(n)=(6-n)[u(n)-u(n-6)]$ , начертайте графиките на следните редици:

$$(a) y_1(n)=x(4-n),$$

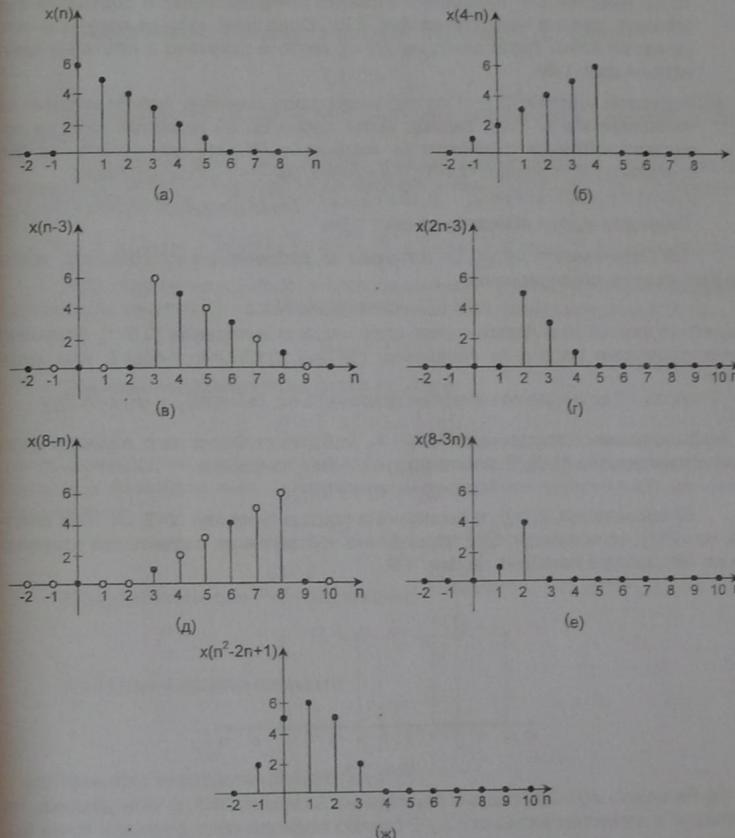
$$(c) y_3(n)=x(8-3n),$$

$$(b) y_2(n)=x(2n-3),$$

$$(d) y_4(n)=x(n^2-2n+1).$$

(a) Редицата  $x(n)$ , показана на фиг. 1.8а е линейно намаляваща, като започва в точката  $n=0$  и завършва в точка  $n=5$ . Първата редица, която ще бъде начертана е  $y_1(n)=x(4-n)$ . Тя се получава чрез изместване на  $x(n)$  с 4 позиции и обръщане във времето. Забележете, че в точка  $n=4$ ,  $y_1(n)$  е равно

на  $x(0)$ . Следователно,  $y_1(n)$  има стойност 6 за  $n=4$  и намалява линейно наляво (намаляващи стойности на  $n$ ) до точка  $n=-1$ , след която  $y_1(n)=0$ . Редицата  $y_1(n)$  е показана на фиг. 1.8б.



Фиг. 1.8. Преобразувания на сигнали

(b) Втората редица,  $y_2(n)=x(2n-3)$  се получава като комбинация от изместване във времето и поддискретизиране. Следователно,  $y_2(n)$  може да се начертава като първо се премести  $x(n)$  надясно с три позиции, както е показано на фиг. 1.8в. Редицата  $y_2(n)$  се образува чрез поддискретизиране с множител 2 (т.e. запазвайки само членовете с четен индекс, както е показано с пътните кръгчета на фиг. 1.8в). Графиката на  $y_2(n)$  е показана на фиг. 1.8г.

(c) Третата редица,  $y_3(n)=x(8-3n)$  се образува като комбинация от преместване във времето, поддискретизиране и обръщане във времето. За да се начертава  $y_3(n)$ , започваме с начертаване на  $x(8-n)$ , която се получава като се измести  $x(n)$  наляво с 8 позиции (изпреварване) и обръщане във времето, както е показано на фиг. 1.8д. След това,  $y_3(n)$  се получава като се вземе всеки трети отчет на  $x(8-n)$ , както е показано с пътните стрелки на фиг. 1.8е.

(d) Редицата  $y_4(n)=(n^2-2n+1)$  се получава чрез линейно преобразуване и променливата  $n$ . Тази редица може лесно да се начертава като се използват таблични стойности на индекса  $n$ . Първо, забележете, че за  $n \geq 4$  или  $n \leq -2$ , тогава  $n^2-2n+1 \geq 9$  и  $y_4(n)=0$ . За  $-1 \leq n \leq 3$  се получава:

$$y_4(-1)=y_4(3)=x(4)=2, \quad y_4(0)=y_4(2)=x(1)=5, \quad y_4(1)=x(0)=6.$$

Редицата  $y_4(n)$  е показана на фиг. 1.8ж.

1.8 Означението  $x((n))_N$  се използва за дефиниране на редицата, която се получава по следния начин

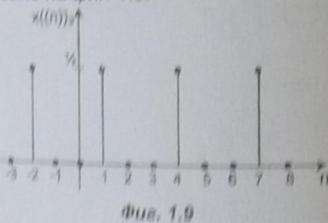
$$x((n))_N = x(n \bmod N),$$

където  $(n \bmod N)$  е положително цяло число в интервала  $[0, N-1]$ , получен след разделяне на  $n$  с  $N$ . Например,  $((3))_8=3$ ,  $((12))_8=4$ ,  $((-6))_4=2$ . Ако  $x(n)=\frac{1}{2} \sin(n\pi/2)u(n)$ , да се начертава графиката на: (a)  $x((n))_3$  и (b)  $x((n-2))_3$ .

(a) Започваме с твърдението, че  $((n))_3$  за всяка стойност на  $n$ , е винаги цяло число в интервала  $[0, 2]$ . Тъй като  $((n))_3=((n+3k))_3$  за всяка  $k$

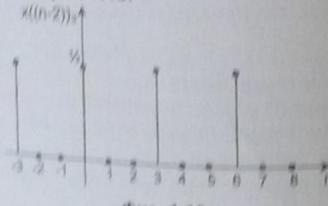
$$x((n))_3 = x((n+3k))_3.$$

Следователно,  $x((n))_3$  е периодична редица с период  $N=3$ . От това следва, че  $x((n))_3$  се получава чрез периодично повтаряне на първите три стойности на  $x(n)$ , както е показано на фиг. 1.9.



Фиг. 1.9

(b) Редицата  $x((n-2))_3$  също е периодична с период  $N=3$ , с тази разлика, че сигналът е изместен надясно с  $n_0=2$  спрямо периодичната редица в точка (a). Тази редица е показана на фиг. 1.10.



Фиг. 1.10

1.9 Мощността на реалния сигнал  $x(n)$  се дефинира като сума от квадратите на стойностите на редицата

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n).$$

Предполагаме, че редицата  $x(n)$  има четна част  $x_o(n)$ , която е

$$x_o(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}.$$

Ако мощността на  $x(n)$  е  $P=5$ , намерете мощността на нечетната част  $x_o(n)$  на  $x(n)$ .

Решаването на тази задача изиска намирането на връзка между мощността на  $x(n)$  и мощността на четната и нечетната част. По дефиниция,  $x(n)=x_e(n)+x_o(n)$ . Следователно,

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_e(n) + x_o(n)]^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2(n) + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n).$$

Забележете, че  $x_e(n)x_o(n)$  е произведението на четна и нечетна редица и затова то е нечетно. Понеже сумата за всички  $n$  на нечетна редица е 0, то

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2x_e(n)x_o(n) = 0.$$

При това положение мощността на  $x(n)$  е

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2(n),$$

което означава, че мощността на  $x(n)$  е равна на сумата от мощностите на четната и нечетната част. Пресмятаме мощността на четната част на  $x(n)$  и получаваме

$$P_e = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2[n]} = -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{5}{3}.$$

Следователно, при  $P=5$  получаваме

$$P_o = 5 - P_e = \frac{10}{3}.$$

1.10 Нека е дадена редицата

$$x(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^n u(-n).$$

(a) Намерете числената стойност на реда

$$A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).$$

(b) Изчислете мощността на  $x(n)$ ,

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n).$$

(c) Ако  $x(n)$  е входният сигнал на променяща се във времето система, определена с уравнението  $y(n)=nx(n)$ , намерете мощността в изходния сигнал (т.е. пресметнете сумата)

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2(n).$$

(a) Това е директно приложение на геометричния ред

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n u(-n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

След заместване на  $n$  с  $-n$  получаваме

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

От геометричния ред следва

$$A = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3.$$

(b) За да определим мощността на  $x(n)$  трябва да пресметнем сумата

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n}.$$

След заместване на  $n$  с  $-n$  и използване на геометричния ред, за тази сума можем да запишем

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} = \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5}.$$

(c) И накрая, за да намерим мощността на  $y(n)=nx(n)$  трябва да пресметнем сумата

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [nx(n)]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{4}{9}\right)^n. \quad (1.17)$$

В табл. 1-1 е даден израз за сумата

$$\sum_{n=0}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2}, \quad |a| < 1, \quad (1.18)$$

но не и за  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a^n$ . Можем да получим затворен вид за тази сума по следният начин. Диференцирайки двете страни на (1.18) по отношение на  $a$ , получаваме

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a^{n-1} = \frac{d}{da} \frac{a}{(1-a)^2} = \frac{1+a}{(1-a)^3}.$$

Следователно получаваме сумата

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a^n = \frac{a(1+a)}{(1-a)^3}.$$

Използваме този израз, за да пресметнем (1.17) и намираме

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{13}{9}\right)}{\left(\frac{5}{9}\right)^3} = \frac{468}{125}.$$

1.11 Изразете редицата

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{за } n = 0, \\ 2 & \text{за } n = 1, \\ 3 & \text{за } n = 2, \\ 0 & \text{останалите случаи,} \end{cases}$$

като сума от мащабиран и преместен единичен скок.

В тази задача можем да извършим разлагане на сигнала, като представим  $x(n)$  като сума от мащабиран и преместен единичен скок. Има няколко начина да се направи това разлагане. Един от тези начини е да се изрази  $x(n)$  като сума от утегловени и преместени единични скокове

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2),$$

като се използва фактът, че единичният отчет може да се запише като разлика на две стъпки

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1).$$

Следователно

$$x(n) = u(n) - u(n-1) + 2[u(n-1) - u(n-2)] + 3[u(n-2) - u(n-3)],$$

от което се получава търсено разлагане

$$x(n) = u(n) + u(n-1) + u(n-2) - 3u(n-3).$$

Друг начин да се получи това представление по-непосредствено е следният. Първо, забелязваме, че разлагането започва с единичен скок, което дава стойност 1 за индекса  $n=0$ . Понеже  $x(n)$  нараства до стойност 2 при  $n=1$ , трябва да добавим закъснял единичен скок  $u(n-1)$ . При  $n=2$ ,  $x(n)$  отново нараства по амплитуда с 1 така, че добавявме закъснял единичен скок  $u(n-2)$ . В тази точка имаме

$$u(n) + u(n-1) + u(n-2) = \begin{cases} 1 & \text{за } n = 0, \\ 2 & \text{за } n = 1, \\ 3 & \text{за } n = 2. \end{cases}$$

При това положение, всичко което остава е да приравним редицата на 0 за  $n \geq 3$ . Това може да се направи чрез изваждане на закъснял единичен скок  $3u(n-3)$ , което води до същото разлагане както преди.

#### Дискретни системи

1.12 За всяка от системите, дадени по-долу,  $x(n)$  е входният сигнал, а  $y(n)$  е изходният сигнал. Определете кои системи са хомогенни, кои са адитивни и кои са линейни.

- (a)  $y(n) = \log(x(n))$ ,
- (b)  $y(n) = 6x(n+2) + 4x(n+1) + 2x(n) + 1$ ,
- (c)  $y(n) = 6x(n) + [x(n+1)x(n-1)]y(n)$ ,
- (d)  $y(n) = x(n) \sin((n\pi)/2)$ ,
- (e)  $y(n) = \operatorname{Re}\{x(n)\}$ ,
- (f)  $y(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x'(-n)]$ .

(a) Ако системата е хомогенна и изходният сигнал се представя с израза

$$y(n) = T[cx(n)] = cT[x(n)]$$

за всеки входен сигнал  $x(n)$  и за всяка стойност на комплексната константа  $c$ . Системата  $y(n) = \log(x(n))$  не е хомогенна, защото реакцията на системата при въздействие на входен сигнал  $x_1(n) = cx(n)$  е

$y_1(n) = \log(x_1(n)) = \log(cx(n)) = \log c + \log(x(n)),$   
което не е равно на  $c \cdot \log(x(n))$ . За да бъде системата адитивна, то ако  $y_1(n) = x_1(n)$ ,  
 $y_2(n)$  са реакциите при входни сигнали  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ , реакцията на  $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$   
трябва да бъде  $y(n) = y_1(n) + y_2(n)$ . За тази система получаваме  
 $T[x_1(n) + x_2(n)] = \log[x_1(n) + x_2(n)] \neq \log[x_1(n)] + \log[x_2(n)].$

Следователно системата не е адитивна. Тъй като системата не е нито  
адитивна, нито хомогенна, тя е нелинейна.

(b) Ако  $y(n)$  е реакцията при входен сигнал  $x(n)$  и има вида  
 $y(n) = 6x(n+2) + 4x(n+1) + 2x(n) + 1,$

то реакцията при  $x_1(n) = cx(n)$  е

$$y_1(n) = 6x_1(n+2) + 4x_1(n+1) + 2x_1(n) + 1 = c[6x(n+2) + 4x(n+1) + 2x(n)] + 1$$

Но

$$c \cdot y(n) = c[6x(n+2) + 4x(n+1) + 2x(n)] + 1,$$

което не е равно на  $y_1(n)$ . Следователно тази система не е хомогенна. Аналогично, забележете, че реакцията при входен сигнал  $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$  е  
 $y(n) = 6x(n+2) + 4x(n+1) + 2x(n) + 1 = 6[x_1(n+2) + x_2(n+2)] +$   
 $+ 4[x_1(n+1) + x_2(n+1)] + 2[x_1(n) + x_2(n)] + 1 = y_1(n) + y_2(n) - 1,$ 
което не е равно на  $y_1(n) + y_2(n)$ . Следователно тази система не е адитивна, е  
нелинейна.

(c) Тази система е хомогенна, защото реакцията на системата при  
ден сигнал  $x_1(n) = cx(n)$  е

$$y_1(n) = 6x_1(n) + \frac{x_1(n+1)x_1(n-1)}{x_1(n)} = c \left[ 6x(n) + \frac{x(n+1)x(n-1)}{x(n)} \right] = cy(n).$$

Очевидно, системата не е адитивна и следователно е нелинейна.

(d) Нека  $y_1(n)$  и  $y_2(n)$  са реакциите на системата при входни сигнали  $x_1(n)$   
и  $x_2(n)$ . Реакцията при входен сигнал

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$$

е

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = [ax_1(n) + bx_2(n)] \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = ax_1(n) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \\ &+ bx_2(n) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = a \cdot y_1(n) + b \cdot y_2(n). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Оттук следва, че системата е линейна, а следователно и адитивна и хомогенна.

(e) Понеже реалната част на сумата на две числа е сума от реалните  
части, ако  $y_1(n)$  е реакцията на системата при входен сигнал  $x_1(n)$ , а  $y_2(n)$  е  
реакцията при входен сигнал  $x_2(n)$ , реакцията  $y(n) = y_1(n) + y_2(n)$  е

$$y(n) = \operatorname{Re}[x_1(n) + x_2(n)] = \operatorname{Re}[x_1(n)] + \operatorname{Re}[x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n).$$

Следователно системата е адитивна, но не е хомогенна, защото  
освен, ако се е реално число. При това положение системата е нелинейна.

(f) При входен сигнал  $x(n)$  на изхода на системата се получава сигнал  
които е спречнатата симетрична част на  $x(n)$ . Ако се е комплексна константа,

$$\operatorname{Re}[cx(n)] = c \operatorname{Re}[x(n)],$$

ако входният сигнал на системата е  $x_1(n) = cx(n)$ , то изходният сигнал е

$$y_1(n) = \frac{1}{2} [x_1(n) + x_1(-n)] = \frac{1}{2} [cx(n) + c^*x^*(-n)] \neq cy(n).$$

Следователно, системата е нехомогенна. Тя обаче е адитивна, защото

$$\begin{aligned} T[x_1(n) + x_2(n)] &= \frac{1}{2} [(x_1(n) + x_2(n)) + (x_1(-n) + x_2(-n))] = \\ &= \frac{1}{2} [(x_1(n) + x_1^*(-n)) + (x_2(n) + x_2^*(-n))] = T[x_1(n)] + T[x_2(n)] \end{aligned}$$

1.13 Една система е линейна, ако едновременно е хомогенна и адитивна.

- (a) дайте пример за хомогенна, но неадитивна система,
- (b) дайте пример за адитивна, но нехомогенна система.

Има много различни системи, които са или хомогенни или адитивни, но не и двата едновременно. Пример за хомогенна, но неадитивна система е

$$y(n) = \frac{x(n-1)x(n)}{x(n+1)}.$$

Обърнете внимание, че ако  $x(n)$  се умножи с комплексна константа  $c$ , то  
изходният сигнал ще бъде

$$y(n) = \frac{cx(n-1)cx(n)}{cx(n+1)} = c \frac{x(n-1)x(n)}{x(n+1)},$$

което е с пъти реакцията при входен сигнал  $x(n)$ . Следователно, системата е  
хомогенна. От друга страна, системата не е адитивна, защото

$$\frac{x_1(n-1) + x_2(n-1)}{x_1(n+1) + x_2(n+1)} [x_1(n) + x_2(n)] \neq \frac{x_1(n-1)x_1(n)}{x_1(n+1)} + \frac{x_2(n-1)x_2(n)}{x_2(n+1)}.$$

Пример за адитивна, но нехомогенна система е

$$y(n) = \operatorname{Im}[x(n)].$$

Адитивността следва от факта, че имагинарната част на сума от комплекски числа е равна на сумата от имагинарните части. Тази система не е хомогенна, защото

$$y(n) = \operatorname{Im}[jx(n)] \neq j \operatorname{Im}[x(n)].$$

1.14 Определете дали следните системи са инвариантни във времето

- (a)  $y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2)$ ,
- (b)  $y(n) = x(n)u(n)$ ,
- (c)  $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$ ,
- (d)  $y(n) = x(n^r)$ ,
- (e)  $y(n) = x((n)_N)$  (т.е.  $y(n) = x(n \bmod N)$ ), както бе описано в задача 1.8,
- (f)  $y(n) = x(-n)$ .

(a) Нека  $y(n)$  е реакцията на системата при произволен входен сигнал  $x(n)$ . За да проверим за инвариантност във времето, ще сравним измествената  
реакция  $y(n-n_0)$  с реакцията на системата на премествания входен сигнал  $x(n-n_0)$ . Ако

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2),$$

за измествената реакция получаваме

$$y(n-n_0) = x(n-n_0) + x(n-n_0-1) + x(n-n_0-2).$$

Сега реакцията на системата при входен сигнал  $x_1(n)=x(n-n_0)$  е  
 $y_1(n) = x_1(n) + x_1(n-1) + x_1(n-2) = x(n-n_0) + x(n-n_0-1) + x(n-n_0-2).$   
Понеже  $y_1(n)=y(n-n_0)$ , то системата е инвариантна на преместването във времето.

(b) Тази система е специален случай на един по-общ вид системи, които имат следното входно-изходно описание  
 $y(n) = x(n)f(n),$

където  $f(n)$  е редицата на променливото изместване. Системи от този тип са винаги инвариантни във времето, освен ако  $f(n)$  е константа. За да покажем това, предполагаме, че  $f(n)$  не е константа и нека  $n_1$  и  $n_2$  са два индекса, за които  $f(n_1) \neq f(n_2)$ . При входен сигнал  $x_1(n)=\delta(n-n_1)$ , изходният сигнал е  
 $y_1(n) = f(n_1)\delta(n-n_1).$

От друга страна, при входен сигнал  $x_2(n)=\delta(n-n_2)$ , реакцията е  
 $y_2(n) = f(n_2)\delta(n-n_2).$

Въпреки, че  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  се различават само по преместването, реакциите  $y_1(n)$  и  $y_2(n)$  се различават по преместването и промяна в амплитудата. Следователно, системата е с променливо преместване.

(c) Нека

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

е реакцията на системата произволен входен сигнал  $x(n)$ . Реакцията на системата при измествен входен сигнал  $x_1(n)=x(n-n_0)$  е

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^n x_1(k) = \sum_{k=-\infty}^n x(k-n_0) = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x(k).$$

Тъй като този израз е равен на  $y(n-n_0)$ , системата е инвариантна във времето.

(d) Тази система е с променливо преместване, което може да се покаже с един прост пример. Забележете, че ако  $x(n)=\delta(n)$ , реакцията ще бъде  $y(n)=\delta(n)$ . Ако  $x_1(n)=\delta(n-2)$ , обаче, реакцията ще бъде  $y_1(n)=x_1(n^2)=\delta(n^2-2)=0$ , което не е равно на  $y(n-2)$ . Следователно, системата е с променливо преместване.

(e) Ако  $y(n)$  е реакцията при входен сигнал  $x(n)$ , то при входен сигнал  $x_1(n)=x(n-N)$ , изходният сигнал е

$$y_1(n) = x((n-N))_n = x((n))_n,$$

което е равно на реакцията при входен сигнал  $x(n)$ . Понеже  $y_1(n) \neq y(n-N)$ , системата не е инвариантна във времето.

(f) Лесно може да се покаже, че тази система е с променливо преместване. Приемаме, че използваме директният метод, при който  $x(n)$  е входния сигнал, а  $y(n)=x(-n)$  е реакцията. Ако разгледаме местения входен сигнал  $x_1(n)=x(n-n_0)$ , ще получим, че реакцията е

$$y_1(n) = x_1(-n) = x(-n-n_0).$$

Обърнете внимание, че ако преместим  $y(n)$  с  $n_0$  ще получим  
 $y(n-n_0) = x(-(n-n_0)) = x(-n+n_0),$

което не е равно на  $y_1(n)$ . Следователно, системата е с променливо преместване.

1.15 Една линейна, дискретна във времето система се характеризира с реакцията си  $h_k(n)$  при подаване на входа на закъснял единичен отчет  $\delta(n-k)$ . За всяка линейна система от следните, определете дали е инвариантна или не във времето.

$$(a) h_k(n)=(n-k)u(n-k),$$

$$(b) h_k(n)=\delta(2n-k),$$

$$(c) h_k(n)=\begin{cases} \delta(n-k-1) & \text{за } k \text{ - четно число,} \\ 5u(n-1) & \text{за } k \text{ - нечетно число.} \end{cases}$$

(a) Обърнете внимание, че  $h_k(n)$  е функция на  $n-k$ . Това води до предположението, че системата е инвариантна във времето. За да се провери това, нека приемем, че  $y(n)$  е реакцията на системата при входен сигнал  $x(n)$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n h_k(n)x(k) = \sum_{k=-\infty}^n (n-k)u(n-k)x(k) = \sum_{k=-\infty}^n (n-k)x(k). \quad (1.20)$$

Реакцията при измествен входен сигнал  $x(n-n_0)$  е

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k-n_0)h_k(n) = \sum_{k=-\infty}^n (n-k)u(n-k)x(k-n_0) = \sum_{k=-\infty}^n (n-k)x(k-n_0).$$

Заместваме  $k=k-n_0$  и получаваме

$$y_1(n) = \sum_{l=0}^{n-n_0} (n-n_0-l)x(l).$$

От израза (1.20) за  $y(n)$  виждаме, че

$$y(n-n_0) = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} (n-n_0-k)x(k),$$

което е равно на  $y_1(n)$ . Следователно, тази система е инвариантна във времето.

(b) За втората система,  $h_k(n)$  не е функция на  $n-k$ . При това положение, може да се очаква, че тази система е с променливо изместване. Нека да разгледаме един пример, от който се вижда, че това е система с променливо изместване. За входния сигнал  $x(n)=\delta(n)$  реакцията е

$$y(n) = h_0(n) = \delta(2n) = \begin{cases} 1 & \text{за } n=0, \\ 0 & \text{за останалите случаи.} \end{cases}$$

Ако входният сигнал  $x(n)$  закъсне с един отчет, реакцията при входен сигнал  $x_1(n)=\delta(n-1)$  е

$$y_1(n) = h_1(n) = \delta(2n-1) = 0.$$

Тъй като  $y_1(n) \neq y(n-1)$ , системата е с променливо преместване.

(c) При последната система въпреки, че  $h_k(n)$  е функция на  $n-k$  за четни стойности на  $k$  и функция на  $(n-k)$  за нечетни стойности на  $k$ ,

$$h_k(n) \neq h_{k-1}(n-1).$$

С други думи, реакцията на системата при сигнал  $\delta(n-k-1)$  не е равна на реакцията на системата при входен сигнал  $\delta(n-k)$ .

Следователно, системата е с променливо преместване.

1.16 Нека  $T[n]$  е една линейна система, която не е необходимо да е инвариантна във времето, и нека тя има реакция  $h_k(n)$  при входен сигнал  $\delta(n-k)$ .

Предложете тест, който позволява да се определи дали системата е стабилна или не и дали системата е каузална или не, ако се знае реакцията  $h_k(n)$ .

(a) Реакцията на една линейна система при входен сигнал  $x(n)$  е

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n h_k(n)x(k). \quad (1.2)$$

При това положение, изходният сигнал може да бъде ограничен по следния начин

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^n h_k(n)x(k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^n |h_k(n)| |x(k)|.$$

Ако  $x(n)$  е ограничена,  $|x(n)| \leq A \leq \infty$

$$y(n) \leq A \sum_{k=-\infty}^n |h_k(n)|.$$

В резултат, ако

$$\sum_{k=-\infty}^n |h_k(n)| \leq B < \infty \quad \text{за всяко } n, \quad (1.2)$$

изходният сигнал ще бъде ограничен и системата ще бъде стабилна. Формула (1.2) е необходимото условие за стабилност. За да установим достатъчността на това условие, ще покажем, че ако тази сума не е крайно число, можем да намерим ограничен входен сигнал, реакцията на който ще бъде неограничен изходен сигнал. Нека предположим, че  $h_k(n)$  е ограничена редица за всяко  $k$  и  $n$  (в противен случай системата ще бъде нестабилна, тъй като реакцията при ограничен входен сигнал  $\delta(n-k)$  ще бъде неограничена). При положение, че  $h_k(n)$  е ограничена за всяко  $k$  и  $n$ , предполагаме, че сумата в (1.2) е неограничена за някое  $n$ , например за  $n = n_0$ . Нека

$$x(n) = \operatorname{sgn}\{h_{n_0}(n_0)\},$$

т.e.

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{за } h_{n_0}(n_0) > 0, \\ 0 & \text{за } h_{n_0}(n_0) = 0, \\ -1 & \text{за } h_{n_0}(n_0) < 0. \end{cases}$$

При този входен сигнал, реакцията в момента  $n = n_0$  е

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^n h_k(n_0)x(k) = \sum_{k=-\infty}^n h_k(n_0) \operatorname{sgn}\{h_{n_0}(n_0)\} = \sum_{k=-\infty}^n |h_k(n_0)|,$$

което според направленото предположение е неограничена. Следователно системата е нестабилна и по този начин установихме достатъчността на упомянето дадено в (1.2).

(b) Нека сега да разгледаме свойството каузалност. При входен сигнал  $x(n)$ , реакцията се дава с формула (1.21). За да бъде една система каузална изходният сигнал  $y(n)$  в момента  $n_0$  не може да зависи от входния сигнал  $x(n)$  за всяко  $n > n_0$ . От тук следва, че (1.21) трябва да има вида

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n h_k(n)x(k).$$

Това обаче ще бъде вярно за всяко  $x(n)$ , тогава и само тогава, когато

$$h_k(n) = 0 \quad \text{за } n < k,$$

1.17 Определете дали системите, дефинирани в задача 1.15 са

стабилни, б) каузални.

(a) За първата система  $h_k(n) = (n-k)u(n-k)$ , обърнете внимание, че  $h_k(n)$  нараства линейно с нарастването на  $n$ . При това положение, тази система не може да бъде стабилна. Например, ако  $x(n) = \delta(n)$ , изходният сигнал ще бъде  $y(n) = h_0(n) = n u(n)$ , който е неограничен. От друга страна, можем да използваме теста предложен в задача 1.16, за да направим проверка за стабилност. Тъй като

$$\sum_{k=-\infty}^n |h_k(n)| = \sum_{k=-\infty}^n |n-k| = \sum_{k=-\infty}^n |k| = \infty,$$

тази система е нестабилна. Но понеже  $h_k(n) = 0$  за  $n < k$  тази система е каузална.

(b) За втората система  $h_k(n) = \delta(2n-k)$ , забележете че  $h_k(n)$  има най-много една ненулева стойност, която е равна на 1. При това положение

$$\sum_{k=-\infty}^n |h_k(n)| \leq 1$$

за всяко  $n$  и системата е стабилна, но не е каузална. За да покажем това нека предположим, че  $x(n) = \delta(n-2)$ , тогава реакцията е

$$y(n) = h_2(n) = \delta(2n-2) = \delta(n-1).$$

Понеже системата реагира преди прилагането на входен сигнал, тя не е каузална.

(c) Обърнете внимание, че за последната система, сумата

$$\sum_{k=-\infty}^n |h_k(n)| = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k-\text{четно}}}^n |h_k(n)| + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k-\text{нечетно}}}^n |h_k(n)| \leq \sum_{\substack{k=-\infty \\ k-\text{четно}}}^n |h_k(n)| = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k-\text{нечетно}}}^n 5u(n-k) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k-\text{нечетно}}}^n 5$$

е неограничена. Следователно тази система е нестабилна. Понеже  $h_k(n) = 0$  за  $n < k$ , системата е каузална.

1.18 Да разгледаме линейна система, която има следната реакция при въздействието на закъснял единичен скок  $s_k(n) = k\delta(n-k)$ .

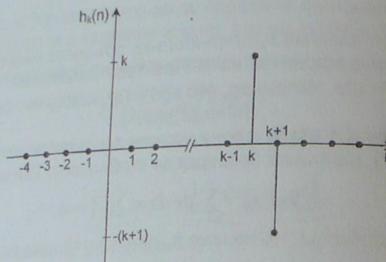
Тук  $s_k(n)$  е реакцията на линейната система при входен сигнал  $x(n) = u(n-k)$ . Намерете реакцията на тази система при входен сигнал  $x(n) = \delta(n-k)$ , където  $k$  е произволно цяло число и определете дали системата е инвариантна във времето, стабилна или каузална. Тъй като системата е линейна можем да намерим реакцията  $h_k(n)$  при входен сигнал  $\delta(n-k) = u(n-k) - u(n-k-1)$ , като се използва линейността следва, че

$$h_k = s_k(n) - s_{k+1}(n) = k\delta(n-k) - (k+1)\delta(n-k-1),$$

което е показано на фиг. 1.11.

От графиката на фиг. 1.11 се вижда, че системата не е инвариантна във времето, тъй като реакцията на системата при подаване на единичен отчет се променя по амплитуда, тъй като единичният отчет изпреварва или закъснява. Понеже  $h_k(n) = 0$  за  $n < k$  тази система е каузална. Тъй като  $h_k(n)$  е неограничена редица като функция на  $k$ , следва че системата е нестабилна. Обърнете внимание, че теста за стабилност на една линейна система получен в задача 1.16 изисква да бъде изпълнено неравенството

$$\max \sum_{k=-\infty}^n |h_k(n)| \leq B < \infty.$$



Фиг. 1.11

За тази система е изпълнено

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k(n)| = |2n|.$$

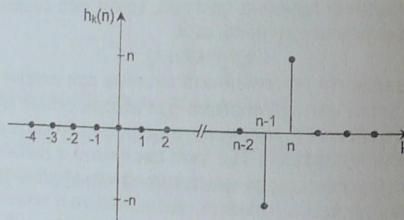
Забележете, че като пресмятаме тази сума, сумираме за всички стойности на  $k$ . Това може да се направи най-лесно като се начертава  $h_k(n)$  като функция на  $n$ , както е показано на фиг. 1.12. Понеже тази сума не може да бъде ограничена, от крайно число  $B$ , системата е нестабилна. Поради това трябва да имаме възможност да намерим ограничен входен сигнал, който дава като реакция неограничен изходен сигнал. Една такава редица е

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-2k).$$

Реакцията е

$$y(n) = n(-1)^n u(n),$$

която очевидно е неограничена.



Фиг. 1.12

1.19 Да разгледаме система, на която изходният сигнал  $y(n)$  е свързан с входния сигнал  $x(n)$ , с уравнението

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(n+k).$$

Определете дали системата е a) линейна; b) инвариантна във времето; c) стабилна; d) каузална.

(a) Първото нещо, на което трябва да обърнем внимание е, че този сигнал се образува чрез сумиране на произведениета на  $x(n)$  с преместените варианти на същия сигнал. Например

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2(k).$$

При това положение очакваме системата да бъде нелинейна. Нека потвърдим това предположение с пример. Обърнете внимание, че ако  $x(n)=\delta(n)$ , то  $y(n)=\delta(n)$ . Ако обаче  $x(n)=2\delta(n)$ , то  $y(n)=4\delta(n)$ . Следователно системата не е хомогенна, а оттук не е линейна.

(b) За да бъде инвариантна системата във времето, нека да сравним

$$y(n-n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(n-n_0+k)$$

с реакцията на системата при входен сигнал  $x_1(n)=x(n-n_0)$

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_1(n+k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k-n_0)x(n+k-n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k')x(n+k'),$$

където последното равенство следва от заместването  $k'=k-n_0$ . Тъй като  $y_1(n) \neq y(n-n_0)$ , тази система не е инвариантна във времето.

(c) Системата е нестабилна, защото ако входният сигнал е единичния скок,  $y(0)$  е неограничен.

(d) При проверката за каузалност, обърнете внимание, че изходният сигнал зависи от стойността на  $x(n)$  за всяко  $n$ . Например  $y(0)$  е сумата от квадратите на  $x(k)$  за всяко  $k$ . Следователно системата не е каузална.

1.20 Нека входният сигнал е  $x(n)$ , а  $y(n)$  е изходният сигнал. Определете кои от следните системи са каузални:

- a)  $y(n)=x^2(n)u(n)$ ,
- b)  $y(n)=x(|n|)$ ,
- c)  $y(n)=x(n)+x(n-3)+x(n-10)$ ,
- d)  $y(n)=x(n)-x(n^2-n)$ ,
- e)  $y(n)=\prod_{k=1}^N x(n-k)$ ,
- f)  $y(n)=\sum_{k=n}^{\infty} x(n-k)$ .

(a) Системата  $y(n)=x^2(n)u(n)$ , е система без памет (т.е. реакцията на системата в момента  $n$  зависи само от входния сигнал в същия момент). Следователно тази система е каузална.

(b) Системата  $y(n)=x(|n|)$ , е пример за некаузална система. Това може да се види като се разгледа изходния сигнал при  $n < 0$ . Обърнете внимание, че  $y(-1)=x(1)$ . Следователно изходният сигнал на системата в момента  $n=-1$  зависи от стойността на входния сигнал в бъдещ момент.

(c) За тази система, с цел да се изчисли изходният сигнал  $y(n)$  във всеки момент  $n$ , трябва да знаем само стойността на входния сигнал  $x(n)$  в моментите  $n, n-1, n-2, \dots$ . При това положение, тази система трябва да е каузална.

(d) Тази система е некаузална, което може да се види ако се пресметне  $y(n)$  за  $n < 0$ . Например

$$y(-1) = x(-1) - x(2).$$

Тъй като  $y(-1)$  зависи от стойността на  $x(2)$ , която се получава след време  $n=-1$ , тази система е некаузална.

(e) Изходният сигнал на тази система в момента  $n$  е произведението на стойностите на входния сигнал  $x(n)$  в моментите  $n-1, \dots, n-N$ . Следователно тъй като изходният сигнал зависи само от предишни стойности на входния сигнал, системата е некаузална.

(f) Системата не е каузална, което може да се разбере ако препишем системата диференчни уравнения по следния начин

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(n-k) = \sum_{l=-\infty}^0 x(l).$$

В този случай входният сигнал трябва да бъде известен за всяко  $n \leq 0$ , да може да се определи изходния сигнал в момента  $n$ . Например, за да намерим  $y(-5)$ , трябва да знаем  $x(0), x(-1), x(-2), \dots$ . При това положение системата е не каузална.

### 1.21 Определете кои от следните системи са стабилни:

- (a)  $y(n) = x^2(n)$ ,
- (b)  $y(n) = e^{x(n)} / x(n-1)$ ,
- (c)  $y(n) = \cos(x(n))$ ,
- (d)  $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$ ,
- (e)  $y(n) = \log(1 + |x(n)|)$ ,
- (f)  $y(n) = x(n) * \cos(\pi n / 8)$ .

(a) Нека  $x(n)$  е произволен ограничен входен сигнал, за който  $|x(n)| < M$ . От тук следва, че изходният сигнал  $y(n) = x^2(n)$  може да се ограничи, ако се постави изискването  $|y(n)| = |x(n)|^2 < M^2$ . Следователно системата е стабилна.

(b) Тази система очевидно не е стабилна. Например, обрнете внимание, че реакцията на системата при подаване на единичен отчет  $x(n) = \delta(n)$  е безкрайна за всяко  $n$ , освен  $n=1$ .

(c) Тъй като  $|\cos(x)| \leq 1$  за всяко  $x$ , тази система е стабилна.

(d) Тази система съответства на цифров интегратор и е нестабилна. Да разгледаме реакцията на системата при единичен скок. При  $x(n) = u(n)$  за  $n \geq 0$  получаваме

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n u(k) = (n+1).$$

Въпреки, че входният сигнал е ограничен,  $|x(n)| \leq 1$ , реакцията на системата е ограничена.

(e) Тази система е стабилна, което може да се покаже като се използва неравенството

$$\log(1+x) \leq x, \quad x \geq 0.$$

$$|y(n)| = |\log(1+|x(n)|)| \leq 1 + |x(n)| < 1 + M.$$

При това положение изходният сигнал е ограничен и системата е стабилна. (f) Тази система не е стабилна. Това може да се види като се разгледа ограничения входен сигнал  $x(n) = \cos(\pi n / 8)$ . Обрнете внимание, че изходният сигнал на системата в момента  $n=0$  е

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{8}\right) \cos\left(-\frac{n\pi}{8}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos^2\left(\frac{n\pi}{8}\right),$$

който е неограничен. От друга страна, тъй като връзката вход-изход е всъщност конвулюция, това е линейна, инвариантна на преместването система с реакция при въздействие на единичен отчет

$$h(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{8}\right).$$

Понеже една линейна, инвариантна на преместването система е стабилна само при изпълнение на условието

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty,$$

то тази система не е стабилна.

### 1.22 Определете кои от следните системи са обратими:

- (a)  $y(n) = 2x(n)$ ,
- (b)  $y(n) = nx(n)$ ,
- (c)  $y(n) = x(n) - x(n-1)$ ,
- (d)  $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$ ,
- (e)  $y(n) = \operatorname{Re}\{x(n)\}$ .

За да тестваме за обратимост, можем да покажем, че една система е обратима като проектираме една обратна система, която еднозначно възстановява входния сигнал по изходния, или можем да покажем, че една система не е обратима като намерим два различни входни сигнала, които създават един и същ изходен сигнал. Всяка от дефинираните по-горе системи ще бъде тествана за обратимост като се използва един от тези два метода.

(a) Тази система е обратима, защото при даден изходен сигнал  $y(n)$  можем да възстановим входния сигнал като използваме, че  $x(n) = 0,5y(n)$ .

(b) Тази система не е обратима, защото стойността на  $x(n)$  за  $n=0$  не може да бъде възстановена от  $y(n)$ . Например, реакцията на системата при входен сигнал  $x(n)$  и при  $x_1(n) = x(n) + \alpha\delta(n)$  ще бъде една и съща за всяко  $\alpha$ .

(c) Поради пресмятането на разликите между две последователни стойности на входния сигнал, тази система няма да е обратима. Например обрнете внимание, че входните сигнали  $x(n)$  и  $x(n)+c$  ще създават един и същ изходен сигнал за произволна стойност на  $c$ .

(d) Тази система съответства на интегратор и представлява обратима система. За да покажем, че системата е обратима можем да създадем обратимата система

$$x_1(n) = y(n) - y(n-1).$$

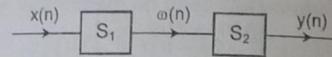
За да покажем, че това е обратната система, обрнете внимание на израза

$$y(n) - y(n-1) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) - \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k) = x(n).$$

(e) Свойството обратимост трябва да се изпълнява както за комплексни,

така и за реални сигнали. Следователно, тази система е необратима, отстранява имагинерната част на  $x(n)$ . Тази система обаче е обратима, кога работи с реални сигнали.

1.23 Да разгледаме последователно свързаните системи  $S_1$  и  $S_2$  (фиг. 1.13).



Фиг. 1.13

(a) Ако  $S_1$  и  $S_2$  са линейни, инвариантни на преместване, стабилни и каузални, ще бъде ли така получената система също линейна, инвариантна на преместване, стабилна и каузална?

(b) Ако  $S_1$  и  $S_2$  са нелинейни ще бъде ли цялата система нелинейна?

(c) Ако  $S_1$  и  $S_2$  са инвариантни на преместването, ще бъде ли цялата система също инвариантна на преместването?

(a) Свойствата линейност, инвариантност на преместването, стабилност и каузалност се запазват при последователно свързване. Например, реакцията на  $S_1$  при входен сигнал  $ax_1(n)+bx_2(n)$  ще бъде  $aw_1(n)+bw_2(n)$  поради линейността на  $S_1$ . Ако реакцията на  $S_1$  е входен сигнал за  $S_2$ , реакцията отново ще бъде  $ay_1(n)+by_2(n)$ , поради свойството линейност. Следователно ако  $S_1$  и  $S_2$  са линейни, последователното им свързване също ще бъде линейно. Аналогично на свойството инвариантност на преместването, ако  $x(n-n_0)$  е входният сигнал на  $S_1$ , реакцията ще бъде  $w(n-n_0)$ . Тъй като  $S_2$  е инвариантна на преместване, реакцията на входен сигнал  $w(n-n_0)$  ще бъде  $y(n-n_0)$ . Следователно реакцията на последователно свързаните системи при входен сигнал  $x(n-n_0)$  ще е  $y(n-n_0)$  и системата е инвариантна на преместване. За да се провери свойството стабилност обрънете внимание, че щом  $S_1$  е стабилна, ако входният сигнал  $x(n)$  е ограничен, изходният сигнал  $w(n)$  ще бъде ограничен. При положение че входният сигнал на стабилната система  $S_2$   $w(n)$  е ограничен, реакцията ѝ също ще бъде ограничена. От тук следва, че последователно свързаната система е стабилна.

Свойството каузалност за общата система, получена от последователно свързаните  $S_1$  и  $S_2$ , следва от факта, че ако  $S_2$  е каузална, изходния сигнал  $y(n)$  в момента  $n=n_0$  зависи само от  $w(n)$  за  $n \leq n_0$ . При положение, че  $S_1$  е каузална сигналът  $w(n)$  за  $n \leq n_0$ , ще зависи само от входния сигнал  $x(n)$  за  $n \leq n_0$ . Където следва, че общата система е каузална.

(b) Ако  $S_1$  и  $S_2$  са нелинейни, не е необходимо да бъде вярно, че общата система ще бъде нелинейна, защото втората система може да промени нелинейността на първата. Например, при

$$\begin{aligned} w(n) &= S_1\{x(n)\} = \exp\{x(n)\}, \\ y(n) &= S_2\{\omega(n)\} = \log\{\omega(n)\}. \end{aligned}$$

Въпреки, че  $S_1$  и  $S_2$  са нелинейни, общата система е линейна.

(c) Както и в точка (b), ако  $S_1$  и  $S_2$  са инвариантни на преместването, не е необходимо да бъде вярно, че общата система също ще бъде инвариантна на преместването. Например, ако първата система е модулатор, който описва с израза

а втората е демодулатор

$$w(n) = x(n) e^{jn\omega_0}$$

$$y(n) = w(n) e^{-jn\omega_0}$$

общата система е инвариантна на преместването, въпреки че модулаторът и демодулаторът не са инвариантни на преместване. Друг пример е случаят когато  $S_1$  е наддискретизаторът

$$\omega(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right) & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \\ 0 & \text{за останалите случаи,} \end{cases}$$

а  $S_2$  е поддискретизаторът

$$y(n) = \omega(2n).$$

В този случай общата система е инвариантна на преместването и  $y(n) = x(n)$ . Ако се направи обратно подреждане, общата система няма да е инвариантна на преместването. Ако една линейна, инвариантна на преместване система, каквато е единственото закъснение, се включи между наддискретизатора и поддискретизатора, общата от трите системи ще бъде инвариантна на преместване.

#### Конволюция

1.24 Първата ненулева стойност на една редица с крайна дължина  $x(n)$  е с индекс  $n=-6$  и има стойност  $x(-6)=3$ , а последната ненулева стойност е с индекс  $n=24$  и има стойност  $x(24)=-4$ . Какъв е индексът на първата ненулева стойност в конволюцията

$$y(n) = x(n) * x(n)$$

и каква е стойността му? А за последната ненулева стойност?

Тъй като извършваме конволюция на две редици с крайна дължина, индексът на първата ненулева стойност в конволюцията е равен на сумата от индексите на първите ненулеви стойности на двете редици, които участват в конволюцията. В този случай, индексът е  $n=-12$ , а стойността е

$$y(-12) = x^2(-6) = 9.$$

Аналогично, индексът на последната ненулева стойност е  $n=48$ , а стойността е

$$y(48) = x^2(24) = 16.$$

1.25 Конволюцията на две редици с крайни дължини ще има крайна дължина. Вярно ли е, че конволюцията на една редица с крайна дължина и редица с безкрайна дължина ще има безкрайна дължина?

Не е необходимо да е вярно, че конволюцията на една редица с крайна дължина и редица с безкрайна дължина ще има безкрайна дължина. Но е възможно и обратното. При това положение, ако  $x(n)=\delta(n)$  и  $h(n)=(0,5)^n u(n)$ , конволюцията ще бъде редица с безкрайна дължина. Възможно е, обаче, редицата с крайна дължина да "премахне" "безкрайната" част на редицата с безкрайна дължина. Например,

$$(0,5)^n u(n) - (0,5)^n u(n-1) = \delta(n).$$

При това положение конволюцията на  $x(n)=\delta(n)-\frac{1}{2}[\delta(n-1)]$  и  $h(n)=(0,5)^n u(n)$  ще има безкрайна дължина

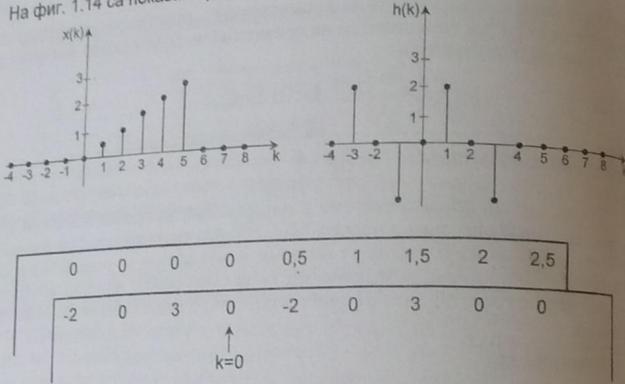
$$\{\delta(n) - \frac{1}{2}[\delta(n-1)]\} * (0,5)^n u(n) = (0,5)^n u(n) - \frac{1}{2} (0,5)^{n-1} u(n-1) = \delta(n).$$

1.26 Намерете конволюцията на двете редици с крайна дължина

$$x(n) = 0,5n[u(n) - u(n-6)],$$

$$h(n) = 2\sin(n\pi/2)[u(n+3) - u(n-4)].$$

На фиг. 1.14 са показани редиците  $x(k)$  и  $h(k)$ .



Фиг. 1.14

Тъй като  $h(n)$  е равно на нула извън интервала  $[-3, 3]$ , а  $x(n)$  е нула извън интервала  $[1, 5]$ , конволюцията  $y(n) = x(n) \cdot h(n)$  е нула извън интервала  $[-2, 8]$ .

Един начин за извършване на конволюция е като се използва метод на пългациите се лист. Написва се таблица със стойностите на  $x(k)$  и  $h(-k)$  в два листа хартия, които се подравняват за  $k=0$ , както е показано на фиг. 1.14 (редицата  $h(-k)$  е отред).

Образуваме сумата на произведенията  $x(k)h(-k)$  и по този начин получаваме стойността на  $y(n)$  за момента  $n=0$ , която е  $y(0)=2$ . Като изместим  $h(-k)$  наляво с 1, умножим и съберем, получаваме стойността на  $y(n)$  в момент  $n=1$ , която е  $y(-1)=2$ . Като изместим още един път наляво, образуваме сумата от произведенията и получаваме  $y(-2)=1$ , което е последната ненулева стойност на  $y(n)$  за  $n < 0$ . Като повторяме процеса и изместваме  $h(-k)$  надясно, получаваме стойностите на  $y(n)$  за  $n > 0$ , които са:

$$\begin{aligned} y(1) &= 2 & y(2) &= 3 & y(3) &= -2 & y(4) &= -3, \\ y(5) &= 2 & y(6) &= 2 & y(7) &= -4 & y(8) &= -5. \end{aligned}$$

Друг начин за извършване на конволюция е като се използва фактът, че

$$x(n) \cdot \delta(n-n_0) = x(n-n_0).$$

Записваме  $h(n)$  във вида

$$h(n) = 2\delta(n+3) - 2\delta(n+1) + 2\delta(n-1) - 2\delta(n-3),$$

и можем да пресметнем  $y(n)$  по следния начин

$$y(n) = 2x(n-3) - 2x(n+1) + 2x(n-1) - 2x(n-3).$$

Съставяме табл. 1-3 с тези изместени редици и добавявме колони в дясната част. Така се получава редицата  $y(n)$ .

1.27 Изведете формула за конволюцията на  $x(n)$  и  $h(n)$ , където

$$\begin{aligned} x(n) &= (1/6)^n u(n), \\ h(n) &= (1/3)^n u(n-3). \end{aligned}$$

Таблица 1-3

$n$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$2x(n+3)$	1	2	3	4	5	0	0	0	0	0	0
$-2x(n+1)$	0	0	-1	-2	-3	-4	-5	0	0	0	0
$2x(n-1)$	0	0	0	0	1	2	3	4	5	0	0
$-2x(n-3)$	0	0	0	0	0	0	-1	-2	-3	-4	-5
$y(n)$	1	2	2	2	3	-2	-3	2	2	-4	-5

Тъй като и двете редици имат безкрайна дължина, по-лесно е да се пресметне сумата от конволюцията директно

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k).$$

Обърнете внимание, че тъй като  $x(n)=0$  за  $n < 0$  и  $h(n)=0$  за  $n < 3$ , сигналът  $y(n)$  ще бъде равен на 0 за  $n < 3$ . Като заместим  $x(n)$  и  $h(n)$  в сумата на конволюцията получаваме

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} u(k) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} u(n-k-3).$$

Поради съществуването на единичния скок  $u(k)$ , долната граница на сумата може да бъде променена на  $k=0$ , и тъй като  $u(n-k-3)$  е нула за  $k > n-3$ , горната граница на сумата може да бъде променена на  $k=n-3$ . Така, за  $n \geq 3$  сумата на конволюцията ще бъде

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n-3} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = 6^n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-n-3} \left(\frac{3}{6}\right)^k \quad \text{за } n \geq 3.$$

Ако използваме геометричният ред за да пресметнем сумата, получаваме

$$y(n) = 6^n \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot 6^n \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[1 - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \quad \text{за } n \geq 3.$$

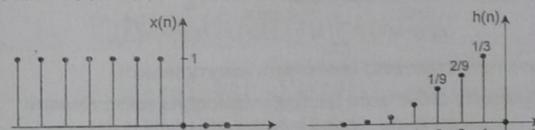
1.28 Една линейна инвариантна на преместването система, има реакция при въздействието на единичен отчет

$$h(n) = u(-n-1).$$

Намерете изходния сигнал, ако входният сигнал е

$$x(n) = -n^3 u(-n).$$

Редиците  $x(n)$  и  $h(n)$  са дадени на фиг. 1.15.



Фиг. 1.15

Тъй като  $x(n)$  е нула за  $n > -1$ , а  $h(n) = 0$  за  $n < -1$ , конволюцията ще е равна на нула за  $n > -2$ . Като се пресметне сумата на конволюцията директно получаваме

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^0 -k3^k u(-k)u[-(n-k)-1].$$

Понеже  $u(-k)=0$  за  $k>0$  и  $u[-(n-k)-1]=0$  за  $k< n+1$ , сумата на конволюцията

$$y(n) = \sum_{k=n+1}^0 -k3^k \quad \text{за} \quad n \leq -2.$$

Ако се промени променливата  $m=k$  и като се използват формулите редовете, дадени в табл. 1-1 получаваме

$$y(n) = \sum_{m=0}^{-n-1} m \left(\frac{1}{3}\right)^m = \frac{(-n-1)(1/3)^{-n+1} + n(1/3)^{-n} + 1/3}{(1-1/3)^2} = \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)(2n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{-n} \quad \text{за} \quad n \leq -2$$

Нека проверим получения отговор за няколко стойности на  $n$ , като използваме графична конволюция. Обръщаме  $x(k)$  във времето и видиме, че  $h(k)$  и  $x(-k)$  не се припокриват за никаква стойност на  $k$  и при това положение  $y(0)=0$ . Въщност, няма да има припокриване, докато не изместим  $x(k)$  на  $n$  с две позиции. Ако  $x(-2-k)$  и  $h(k)$  се припокриват в една точка и произведението е равно на  $1/3$  следва, че  $y(-2)=1/3$ . Като пресметнем горния израз за  $y(-2)$  при  $n=-2$ , получаваме същия резултат. За  $n=-3$  редицата  $x(-3-k)$  и  $h(k)$  припокриват в две точки. При това положение сумата от произведението  $y(-3)=1/3+2/9=5/9$ , което е същото както израза по-горе.

**1.29** Ако реакцията на една линейна инвариантна на изместване система при подаване на функцията единичен скок е  $s(n)=n(1/2)^n u(n)$ , намерете реакцията при въздействие на единичния отчет  $h(n)$ .

При решаването на тази задача ще отбележим, че  $\delta(n)=u(n)-u(n-1)$ . Следователно реакцията при подаване на единичния отчет  $h(n)$  е свързана със следния израз

$$h(n) = s(n) - s(n-1).$$

Ако реакцията  $s(n)$  е известна, тогава

$$\begin{aligned} h(n) &= s(n) - s(n-1) = n(1/2)^n u(n) - (n-1)(1/2)^{n-1} u(n-1) \\ &= [n(1/2)^n - 2(n-1)(1/2)^n] u(n-1) = (2-n)(1/2)^n u(n-1). \end{aligned}$$

**1.30** Докажете свойството комутативност на конволюцията  $x(n)*h(n) = h(n)*x(n)$ .

Доказването на това свойство е лесно и включва просто преобразуване на сумата на конволюцията. Конволюцията на  $x(n)$  и  $h(n)$  се дава с формулата

$$x(n)*h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k)$$

и след заместване с  $l=-k$  се получава

$$x(n)*h(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-l)h(l) = h(n)*x(n),$$

и по този начин се установява свойството комутативност.

**1.31** Докажете свойството дистрибутивност на конволюцията

$$h(n)*[x_1(n) + x_2(n)] = h(n)*x_1(n) + h(n)*x_2(n).$$

За да докажем свойството дистрибутивност имаме

следователно

$$\begin{aligned} h(n)*[x_1(n) + x_2(n)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)[x_1(n-k) + x_2(n-k)], \\ h(n)*[x_1(n) + x_2(n)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x_1(n-k) + \\ &\quad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x_2(n-k) = h(n)*x_1(n) + h(n)*x_2(n), \end{aligned} \quad (1.23)$$

и по този начин се установява свойството дистрибутивност.

### 1.32 Нека

$h(n) = 3(1/2)^n u(n) - 2(1/3)^{n-1} u(n)$  да е реакцията на една линейна, инвариантна на преместването система. Ако на входа се подаде единичен отчет

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{за} \quad n \geq 0, \\ 0 & \text{за} \quad \text{другите случаи}, \end{cases}$$

намерете  $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n)$ , където  $y(n) = h(n)*x(n)$ .

Като имаме предвид, че

$$y(n) = h(n)*x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k),$$

и ако  $x(n)$  е единичният скок, тогава

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k) = \sum_{k=n}^{\infty} h(k).$$

При това положение, можем да запишем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \sum_{k=n}^{\infty} h(k).$$

Като пресметнем сумата, получаваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 3 \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (1/3)^{k-1} = \frac{3}{1-1/2} - \frac{6}{1-1/3} = -3.$$

### 1.33 Пресметнете конволюцията на редицата

$$x(n) = (0,9)^n u(n)$$

с пилообразния сигнал

$$h(n) = nu(n).$$

Конволюцията на  $x(n)$  и  $h(n)$  е

$$y(n) = x(n)*h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [(0,9)^k u(k)][(n-k)u(n-k)].$$

Тъй като  $u(k)=0$  за  $k<0$ , а  $u(n-k)=0$  за  $k>n$ , тази сума може да се запише по следния начин

$$y(n) = \sum_{k=0}^n (n-k)(0,9)^k, \quad n \geq 0,$$

или

$$y(n) = n \sum_{k=0}^n (0,9)^k - \sum_{k=0}^n k(0,9)^k, \quad n \geq 0.$$

Като се използват редовете, дадени в табл. 1-1 получаваме

$$y(n) = n \frac{1 - (0.9)^{n+1}}{1 - 0.9} - \frac{n(0.9)^{n+2} - (n+1)(0.9)^{n+1} + 0.9}{(1 - 0.9)^2} =$$

$$= 10n[(1 - (0.9)^{n+1})] - 100[(n(0.9)^{n+2} - (n+1)(0.9)^{n+1} + 0.9)],$$

лесно

което може да бъде опростено до израза

$$y(n) = [10n - 90 + 90(0.9)^n]u(n).$$

1.34 Извършете конволюцията  $y(n) = x(n) * h(n)$ ,  
ако  $h(n) = (1/2)^n u(n)$   
и  $x(n) = (1/3)^n [u(n) - u(n - 101)]$ .

При положение, че

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k),$$

заместваме  $x(n)$  и  $h(n)$  в сумата на конволюцията и получаваме

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n (1/3)^k [u(k) - u(k - 101)](1/2)^{n-k} u(n-k)$$

или

$$y(n) = \sum_{k=0}^{100} (1/3)^k (1/2)^{n-k} u(n-k).$$

За да пресметнем тази сума, която зависи от  $n$ , ще разгледаме три случая. Първо, за  $n < 0$  сумата е равна на нула, защото  $u(n-k)=0$  за  $0 \leq k \leq 100$ . Следователно,

$$y(n) = 0, \quad n < 0.$$

За втория случай, обърнете внимание, че за  $0 \leq n \leq 100$  редицата  $u(n-k)$  за  $k < n$ . При това положение

$$y(n) = \sum_{k=0}^n (1/3)^k (1/2)^{n-k} = (1/2)^n \sum_{k=0}^n (2/3)^k =$$

$$= (1/2)^n \frac{1 - (2/3)^{n+1}}{1 - 2/3} = 3(1/2)^n [1 - (2/3)^{n+1}].$$

И накрая, за  $n \geq 100$ , забележете, че  $u(n-k)=1$  за всяко  $k$  в интервал  $0 \leq k \leq 100$ . Следователно,

$$y(n) = \sum_{k=0}^{100} (1/3)^k (1/2)^{n-k} = (1/2)^n \sum_{k=0}^{100} (2/3)^k =$$

$$= (1/2)^n \frac{1 - (2/3)^{101}}{1 - 2/3} = 3(1/2)^n [1 - (2/3)^{101}].$$

Като краен резултат получаваме:

$$y(n) = \begin{cases} 0 & \text{за } n < 0, \\ 3(1/2)^n [1 - (2/3)^{n+1}] & \text{за } 0 \leq n \leq 100, \\ 3(1/2)^n [1 - (2/3)^{101}] & \text{за } n \geq 100. \end{cases}$$

1.35 Нека  $h(n)$  е отсечената експоненциална редица

$$h(n) = \begin{cases} \alpha^n & \text{за } 0 \leq n \leq 10, \\ 0 & \text{за останалите случаи.} \end{cases}$$

а  $x(n)$  е дискретен импулс от вида

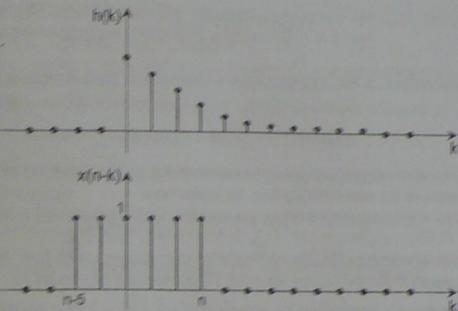
$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{за } 0 \leq n \leq 5, \\ 0 & \text{за останалите случаи.} \end{cases}$$

Намерете конволюцията  $y(n) = h(n) * x(n)$ .  
За да намерим конволюцията на тези две редици с крайна дължина

трябва да пресметнем сумата

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^n h(k)x(n-k).$$

За да пресметнем тази сума, е необходимо да начертаем  $h(k)$  и  $x(n-k)$  като функция на  $k$ , както е показано на фиг. 1.16.



Фиг. 1.16

Обърнете внимание, че големината на интервала на припокриване между  $h(k)$  и  $x(n-k)$  зависи от стойността на  $n$ . Например, ако  $n < 0$ , нами припокриване, докато при  $0 \leq n \leq 5$  двете редици се припокриват в интервала  $0 \leq k \leq n$ . При това положение разглеждаме пет различни случая.

Случай 1.  $n < 0$ . При  $n < 0$  няма припокриване между  $h(k)$  и  $x(n-k)$ . Следователно, произведението  $h(k)x(n-k)=0$  за всяко  $k$  и  $y(n)=0$ .

Случай 2.  $0 \leq n \leq 5$ . В този случай произведението  $h(k)x(n-k)$  не е нула само в интервала  $0 \leq k \leq n$ . Тогава

$$y(n) = \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}.$$

Случай 3.  $6 \leq n \leq 10$ . При  $6 \leq n \leq 10$  всички ненулеви стойности на  $x(n-k)$  са в границите на сумата и

$$y(n) = \sum_{k=n-5}^n \alpha^k = \sum_{k=0}^{\delta} \alpha^{k+(n-5)} = \alpha^{n-5} \sum_{k=0}^{\delta} \alpha^k = \alpha^{n-5} \frac{1 - \alpha^{\delta+1}}{1 - \alpha}.$$

Случай 4.  $11 \leq n \leq 15$ . Когато  $11 \leq n \leq 15$ , редиците  $h(k)$  и  $x(n-k)$  се припокриват в интервала  $n-5 \leq k \leq n$ . Следователно,

$$y(n) = \sum_{k=n-5}^n \alpha^k = \sum_{k=0}^{\delta-n} \alpha^{k+(n-5)} = \alpha^{n-5} \sum_{k=0}^{\delta-n} \alpha^k = \alpha^{n-5} \frac{1 - \alpha^{\delta-n+1}}{1 - \alpha}.$$

Случай 5.  $n > 15$ . За  $n > 15$  отново няма припокриване между  $h(k)$  и  $x(n-k)$ , произведението  $h(k)x(n-k)=0$  за всяко  $k$ . Следователно,  $y(n)=0$  за  $n > 15$ .

Като резултат за конволюцията се получава

$$y(n) = \begin{cases} 0 & \text{за } n < 0, \\ \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} & \text{за } 0 \leq n \leq 5, \\ \frac{\alpha^{n-5} (1 - \alpha^6)}{1 - \alpha} & \text{за } 6 \leq n \leq 10, \\ \frac{\alpha^{n-5} (1 - \alpha^{16-n})}{1 - \alpha} & \text{за } 11 \leq n \leq 15, \\ 0 & \text{за } n > 15. \end{cases}$$

1.36 Корелацията на две редици е операция, дефинирана със следната формула

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n+k).$$

Обърнете внимание, че за означаване на корелация се използва \*, като за означаване на конволюцията се използва \*.

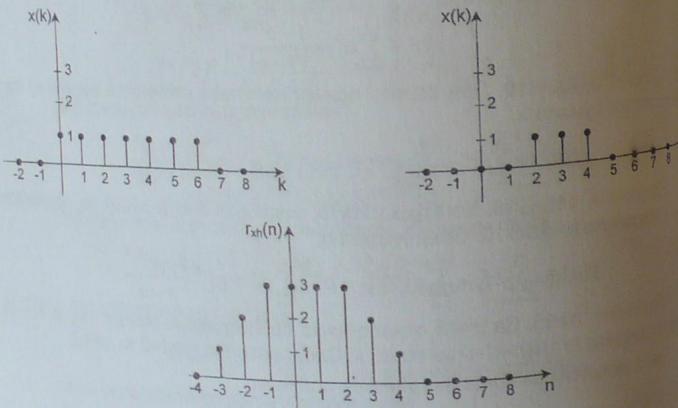
(a) Намерете корелацията между редиците  $x(n)=u(n)-u(n-6)$  и  $h(n)=u(n-2)$ .

5). (b) Намерете корелацията на  $x(n)=\alpha^n u(n)$  със самата нея (т.е.  $h(n)=x(n)$ ). Предполага се, че  $|\alpha|<1$ .

(a) Ако сравним израза за корелацията на  $x(n)$  и  $h(n)$  с конволюцията

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k),$$

ще видим, че единствената разлика е в това, че при конволюцията обрънатата във времето поради изместване с  $n$ , докато при корелацията измествена без да е обръната във времето. При това положение, за да можем да използваме графичен метод за изчисляване на корелацията, трябва просто да начертаем  $x(n)$  и  $h(n)$ , да местим  $h(n)$  на  $n$  (наляво, ако  $n>0$  и надясно, ако  $n<0$ ), да умножим двете редици  $x(n)$  и  $h(n+k)$  и да сумираме тези произведения. Редиците  $x(n)$  и  $h(n)$  са показани на фиг. 1.17.



Фиг. 1.17

Ако означим корелацията с  $r_{xh}(n)$ , вижда се, че за  $n=0$  корелацията има стойност 3. Въщност това ще бъде стойността на  $r_{xh}(n)$  за  $-1 \leq n \leq 2$ . За  $n=3$  редиците  $x(k)$  и  $h(3+k)$  се при покриват само в две точки и  $r_{xh}(3)=2$ . Аналогично, тъй като  $x(k)$  и  $h(4+k)$  се при покриват само в една точка -  $r_{xh}(4)=1$ . Накрая  $r_{xh}(n)=0$  за  $n>4$ . Ако продължим по подобен начин за  $n<0$  ще получим, че  $r_{xh}(-2)=2$  и  $r_{xh}(-3)=1$ . Корелацията  $r_{xh}(n)$  е показана на фиг. 1.17.

(b) Нека  $r_x(n)$  е означението за автокорелация на  $x(n)$ . Обърнете внимание, че автокорелацията е конволюцията на  $x(n)$  и  $x(-n)$

$$r_x(n) = x(n) * x(n) = x(n) * x(-n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(n+k).$$

Също така, забележете, че  $r_x(n)$  е четна функция спрямо  $n$

$$r_x(-n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(-n+k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k'+n)x(k') = r_x(n).$$

При това положение, е необходимо да се намерят стойностите на  $r_x(n)$  за  $n \geq 0$ . За  $n \geq 0$  имаме

$$r_x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u(k) \alpha^{n+k} u(n+k) = \alpha^n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k} = \frac{1}{1 - \alpha^2} \alpha^n, \quad n \geq 0.$$

Ако използваме симетрията на  $r_x(n)$ , за  $n < 0$  получаваме

$$r_x(n) = \frac{1}{1 - \alpha^2} \alpha^{-n}, \quad n < 0.$$

При комбиниране на тези два резултата, получаваме като краен резултат

$$r_x(n) = \frac{1}{1 - \alpha^2} \alpha^{|n|}.$$

### Диференчни уравнения

1.37 Разглеждаме системата описана с диференчното уравнение

$$y(n) = y(n-1) - y(n-2) + 0,5x(n) + 0,5x(n-1).$$

Да се намери реакцията на тази система при входен сигнал

$$x(n) = (0,5)^n u(n)$$

и начални условия  $y(-1)=0,75$  и  $y(-2)=0,25$ .

Първата стъпка за решаване на това диференчно уравнение е да се намери частното решение. При  $x(n)=(0,5)^n u(n)$ , допускаме че решението има вида

$$y_p(n) = C_1 (0,5)^n, \quad n \geq 0. \quad (1.24)$$

Заместваме това решение в диференчното уравнение и получаваме

$$C_1 (0,5)^n = C_1 (0,5)^{n-1} - C_1 (0,5)^{n-2} + 0,5 (0,5)^n + 0,5 (0,5)^{n-1}, \quad n \geq 0.$$

Делим на  $(0,5)^n$ ,

$$C_1 = 2C_1 - 4C_1 + 0,5 + 1$$

и получаваме следната стойност

$$C_1 = \frac{1}{2}.$$

Следваща стъпка е да се намери хомогенното решение. Характеристичното уравнение е

$$z^2 - z + 1 = 0.$$

Корените на това уравнение са

$$z = \frac{1}{2}(1 \pm j\sqrt{3}) = e^{\pm j\pi/3}.$$

При това положение, хомогенното решение е от вида

$$y_h(n) = A_1 e^{jn\pi/3} + A_2 e^{-jn\pi/3},$$

а общото решение е

$$y_h(n) = (0,5)^{n+1} + A_1 e^{jn\pi/3} + A_2 e^{-jn\pi/3}, \quad n \geq 0.$$

Трябва да бъдат намерени стойностите на константите  $A_1$  и  $A_2$  за общото решение да удовлетворява началните условия  $y(-1)=0,75$  и  $y(-2)=1$ . Тъй като решението, дадено с (1.24) е приложимо само за  $n \geq 0$ , трябва да мерим еквивалентни начални условия за  $y(0)$  и  $y(1)$ . Като пресметнем диференчното уравнение за  $n=0$  и  $n=1$ , получаваме

$$y(0) = y(-1) - y(-2) + 0,5x(0) + 0,5x(-1) = 0,75 - 0,25 + 0,5 = 1$$

и

$$y(1) = y(0) - y(-1) + 0,5x(1) + 0,5x(0) = 1 - 0,75 + 0,25 + 0,5 = 1.$$

Заместваме така получените начални условия в (1.24) и получаваме

$$y(0) = 0,5 + A_1 + A_2 = 1,$$

$$y(1) = 0,25 + A_1 e^{j\pi/3} + A_2 e^{-j\pi/3} = 1.$$

Записваме тази двойка уравнения и двете неизвестни  $A_1$  и  $A_2$  в матричен вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{j\pi/3} & e^{-j\pi/3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,75 \end{bmatrix}.$$

Като решим това уравнение, получаваме

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = j \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} e^{-j\pi/3} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} e^{j\pi/3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Заместваме в (1.24), опростяваме и след някои преобразувания  
раме

$$y(n) = (0,5)^{n+1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{2} \sin\left((n-1)\frac{\pi}{3}\right).$$

Трябва да се отбележи, че тъй като диференчното уравнение има коефициенти, корените на характеристичния полином са комплексни и имат двойки. Това е гаранция, че реакцията, при въздействието на единичен скок, е реална. При реален входен сигнал  $x(n)$ , реакцията трябва да е също реални стойности, и оттук следва, че константата  $A_2$  ще бъде комплекно-спрепната на  $A_1$ .

$$A_2 = A_1^*$$

1.38 Една рекурсивна система от втори ред се описва с ЛДУПК

$$y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + x(n) - x(n-1).$$

- (a) Намерете реакцията на системата, при подаване на единичен скок.
- (b) Намерете реакцията на системата, при входен сигнал  $x(n) = u(n) - u(n-10)$  и нулеви начални условия.
- (c) Намерете реакцията на системата, при входен сигнал  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

нулеви начални условия.

(a) За да намерим реакцията на системата, при подаване на единичен скок, трябва да решим диференчното уравнение за  $x(n) = \delta(n)$  и нулеви начални условия. Характеристичното уравнение е

$$z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8} = \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right).$$

При това положение, хомогенното решение е

$$y_h(n) = A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2 \left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0. \quad (1.25)$$

Тъй като, частното решение е нула, когато входният сигнал на системата е единичен отчет, формула (1.25) представлява общото решение. За да намерим константите  $A_1$  и  $A_2$ , трябва да получим началните условия при  $n=0$  и  $n=1$ . При нулеви начални условия  $y(-1)=y(-2)=0$ , откъдето следва, че

$$y(0) = \frac{3}{4}y(-1) - \frac{1}{8}y(-2) + x(0) - x(-1) = 1,$$

$$y(1) = \frac{3}{4}y(0) - \frac{1}{8}y(-1) + x(1) - x(0) = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

Сега можем да запишем двата уравнения за двете неизвестни  $A_1$  и  $A_2$ , като пресметнем (1.25) за  $n=0$  и  $n=1$

$$1 = A_1 + A_2,$$

$$-\frac{1}{4} = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{4}A_2.$$

Като решим спрямо  $A_1$  и  $A_2$ , получаваме

$$A_1 = -2, \quad A_2 = 3.$$

При това положение

$$y(n) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0,$$

и реакцията на системата при подаване на единичен отчет е

$$h(n) = \left[ -2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \right] u(n).$$

(b) За да намерим реакцията на системата, при входен сигнал  $x(n) = u(n) - u(n-10)$ , можем да използваме два начина. При първия, можем да извършим конволюцията на  $h(n)$  и  $x(n)$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^9 h(n-k).$$

Аналогично, като обрънем внимание, че входният сигнал е сумата от два импулса, можем да намерим импулсната реакция на системата,  $s(n)$  и като използваме свойството линейност, да запишем реакцията в следния вид

$$y(n) = s(n) - s(n-10).$$

Ако използваме този метод, можем да видим от точка (a), че импулсната реакция за  $n \geq 0$  е

$$s(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=0}^n h(k) = \sum_{k=0}^n \left[ -2\left(\frac{1}{2}\right)^k + 3\left(\frac{1}{4}\right)^k \right], \quad n \geq 0.$$

Като пресметнем сумите с помощта на геометричния ред, получаваме израза

$$s(n) = \left[ -2 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + 3 \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right] u(n) = \left[ 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] u(n).$$

Тогава търсеното решение е

$$y(n) = s(n) - s(n-10) = \left[ 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] u(n) - \left[ 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-10} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-10} \right] u(n-10)$$

(c) Обърнете внимание, че ако входният сигнал е  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ , то цията  $x(n)$  има същия вид, както едното от събирамите в хомогенното уравнение. Следователно, частното решение няма да има вида  $y_p(n) = C \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , както е показано в табл. 1-2.

Ако бяхме заместили това частно решение в диференчното уравнение да установим, че няма такава стойност на  $C$ , която да го удовлетворява. Ако коренът на характеристичното уравнение е двукратен, частното решение има вида

$$y_p(n) = Cn \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Заместваме го в диференчното уравнение и получаваме

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3}{4} C(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{8} C(n-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Като разделим на  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ , получаваме

$$Cn = \frac{3}{2} C(n-1) - \frac{1}{2} C(n-2) - 1.$$

Като решим уравнението за  $C$ , намираме  $C=-2$ . При това положение тощо решение е

$$y(n) = -2n \left(\frac{1}{2}\right)^n + A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2 \left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0.$$

Трябва да намерим константите  $A_1$  и  $A_2$ . Както и в точка (a), при нулеви начални условия намираме, че  $y(0)=1$  и  $y(1)=1/4$ . Следователно, като предадем (1.26) за  $n=0$  и  $n=1$ , получаваме следните две уравнения за неизвестни  $A_1$  и  $A_2$

$$\begin{aligned} 1 &= A_1 + A_2, \\ \frac{1}{4} &= -2 \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{4} A_2. \end{aligned}$$

Решаваме системата и намираме  $A_1=4$  и  $A_2=3$ . Тогава общото реше-

ние

$$y(n) = \left[ -2n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] u(n).$$

1.39 Да разгледаме случая, когато ипотека на стойност 100 000\$ трябва да бъде изплатена на равни месечни вноски по  $d$  долара. Лихвата, която се натрупва всеки месец, е 10% годишно върху неплатената сума (т.е. след първия месец общият дълг възлиза на  $\left(100000 + \frac{0,10}{12} \cdot 100000\right)$ ). Определете големината на вносите  $d$ , така че ипотеката да бъде изплатена за 30 години и намерете общата сума, която ще бъде изплатена за 30 годишен период.

Общата неплатена сума през края на  $n$ -тия месец, без допълнителни заеми или суми, е равна на неплатената сметка от предишния месец плюс лихвата, начислена върху неплатената сума за предишния месец. Следователно, ако означим с  $y(n)$  сумата в края на  $n$ -тия месец получаваме

$$y(n) = y(n-1) + \beta y(n-1),$$

където  $\beta = \frac{0,10}{12}$  е лихвата, начислена върху неплатената сума. В допълнение, баланса по сметката трябва да бъде регулиран от нетната сума, преди парите от банката да влязат във вашия джоб, а това е сумата взета на заем през  $n$ -тия месец минус сумата платена на банката в  $n$ -тия месец.

$$y(n) = y(n-1) + \beta y(n-1) + x_b(n) - x_p(n),$$

където  $x_b(n)$  е сумата взета на заем през  $n$ -тия месец, а  $x_p(n)$  е сумата платена през  $n$ -тия месец. Като комбинираме получаваме

$$y(n) - \nu y(n-1) = x_b(n) - x_p(n) = x(n),$$

където  $\nu = 1 + \beta = 1 + \frac{0,10}{12}$ , а  $x(n)$  е нетната сума пари през  $n$ -тия месец, която остава в банката. Тъй като основната сума на дълга без лихвите, заета през нулевия месец има стойност  $p$  долара, а сметките от по  $d$  долара започват от 1-ия месец, функцията на управлението,  $x(n)$  е

$$x(n) = x_b(n) - x_p(n) = p \delta(n) - d u(n-1).$$

Тогава диференчното уравнение за  $y(n)$  придобива вида

$$y(n) - \nu y(n-1) = p \delta(n) - d u(n-1).$$

Понеже нашето разглеждане се прави при нулеви начинни условия,  $y(0)=0$ , и входната величина е линейна комбинация от машабиран единичен отчет и машабиран закъснял отчет, решението на диференчното уравнение е просто

$$y(n) = ph(n) + ds(n-1),$$

където  $h(n)$  и  $s(n)$  са съответно единичният отчет и реакцията на единичния отчет. За да намерим реакцията на единичния отчет, записваме диференчното уравнение във вида

$$y(n) = \nu y(n-1) + \delta(n).$$

Характеристичното уравнение за това диференчно уравнение е

$$z - \nu = 0,$$

а хомогенното решение е

$$y(n) = A \nu^n, \quad n \geq 0$$

Тъй като входната величина  $x(n)=\delta(n)$  е равна на нула за  $n>0$ , че решение е нула (единичният отчет само установява началното условие  $y(0)$ ). Като решим диференчното уравнение за  $n=0$ , получаваме

$$y(0) = y(-1) + 1 = 1.$$

Оттук следва, че  $A=1$  в хомогенното решение и също, че реални единичния отчет е

$$h(n) = v^n u(n).$$

Можем да намерим импулсната реакция като извършим конволюции редиците  $h(n)$  и  $u(n)$

$$s(n) = h(n) * u(n) = \sum_{k=0}^n h(k) = \sum_{k=0}^n v^k = \frac{1-v^{n+1}}{1-v}, \quad n \geq 0.$$

При това положение, общото решение е

$$y(n) = ph(n) - ds(n-1) = p v^n u(n) - d \frac{1-v^n}{1-v} u(n-1).$$

Сега искаме да намерим стойността на  $d$ , така че след 360 равни вноски ипотеката да бъде изплатена, т.е. искаме  $d$  да е такова, че

$$y(360) = p v^{360} - d \frac{1-v^{360}}{1-v} = \frac{1}{1-v} [p(1-v)v^{360} - d(1-v^{360})] = 0.$$

Като решим това уравнение по отношение на  $d$ , получаваме

$$d = \frac{p(1-v)}{1-v^{360}} v^{360}.$$

При  $v = \frac{12.1}{12}$  и  $p = 100,000$ , получаваме  $d = 877,57$ .

Общата сума, изплатена на банката след 30 години е

$$C = (877,57) \cdot (360) = 315925,20.$$

## ГЛАВА 2

### ДИСКРЕТНИ ПРЕОБРАЗУВАНИЯ

#### 2.1. Редове на Фурье

Всеки периодичен сигнал  $f(t)$  може да бъде представен като сума от безкраен брой синусоидални и косинусоидални членове и постоянен член, наречена ред на Фурье

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t), \quad (2.1)$$

където  $t$  е независима променлива, която най-често представлява времето, но би могло, например, да представлява разстояние или някаква друга величина. Функцията  $f(t)$  е най-често напрежение, но би могло да бъде всеки друг сигнал:  $\omega = 2\pi/T_p$  се нарича първи хармоник, или основен хармоник, ъглова честота – свързана с основната честота  $f$  чрез равенството  $\omega = 2\pi f$ .  $T_p$  е периодът на повторение на сигнала. Членът

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} f(t) dt$$

е константа равна на средната стойност на  $f(t)$  по отношение на времето, взета за един период, която може да представлява, например, постояннотоково ниво на напрежението.

Фуриеровите кофициенти се дават с формулите

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

и

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

Честотите  $n\omega$  се наричат  $n$ -ти хармоници на  $\omega$ . Безкрайният ред (2.1) съдържа косинусоидални и синусоидални честотно зависими членове с различни амплитуди  $a_n$  и  $b_n$ . Този ред може да бъде записан по-компактно, ако се използва експоненциално представяне и има предимството, че този начин на означаване дава възможност за много по-лесни математически действия. Експоненциалният вид на Фуриеровия ред е

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega t}, \quad (2.2)$$

където

$$d_n = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (2.3)$$

е комплексна величина и  $|d_n|$  се измерва във волтове.

Сумата съдържа отрицателни стойности на  $n$  и поради това полином от реда включва отрицателни честоти,  $-n\omega$ . Това няма физически смисъл само математически, но като резултат, големината  $|d_n|$  на комплексните амплитуди  $d_n$  са сега числено равни наполовина. По тази причина амплитудите се разделят поравно между съответните отрицателни и положителни чести. Тогава точната амплитуда за честота  $n\omega$  се намира като удвоим пресметнатата стойност. Комплексният и тригонометричният вид са свързани с формулата

$$d_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$$

и

$$\varphi_n = -\arctg(b_n / a_n),$$

където  $\varphi_n$  е фазовият ъгъл на  $n$ -тата хармонична компонента. Всяка хармонична компонента на сигнала се характеризира с две неща – фазов ъгъл и амплитуда.

**Пример 2.1.** Да разгледаме периодичния еднополярен импулсен сигнал, показан на фиг. 2.1a. Нарочко координатното начало не е центрирано спрямо импулса и по този начин имаме възможност да илюстрираме как отразява това на Фуриеровия ред.

След заместване на съответните стойности в (2.3) се получава

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{T_p} \int_{-(\tau-x\tau)}^{\tau} A e^{-jn\omega t} dt = \frac{A}{T_p} \left[ \frac{e^{-jn\omega t}}{-jn\omega} \right]_{-(\tau-x\tau)}^{\tau} = \frac{A}{n\omega T_p} \frac{e^{-jn\omega\tau} - e^{jn\omega(\tau-x\tau)}}{-j} = \\ &= \frac{A}{n\omega T_p} e^{-jn\omega\tau} \left[ \frac{e^{jn\omega\tau} - 1}{j} \right] = \frac{2A}{n\omega T_p} e^{-jn\omega\tau} \left[ \frac{e^{jn\omega\tau/2} - e^{-jn\omega\tau/2}}{2j} \right] e^{jn\omega\tau/2} = \\ &= \frac{2A}{n\omega T_p} e^{jn\omega(\tau/2-x\tau)} \sin\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right) = \frac{2A}{n\omega T_p} \frac{n\omega\tau}{2} e^{jn\omega(\tau/2-x\tau)} \frac{\sin\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)}{\frac{n\omega\tau}{2}} = \\ &= \frac{A\tau}{T_p} \text{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right) e^{jn\omega(0.5-x)\tau}, \end{aligned}$$

където

$$\text{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right) = \frac{\sin(n\omega\tau/2)}{n\omega\tau/2}$$

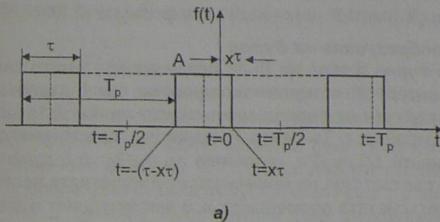
е известна под името дискретизираща функция на аргумента  $n\omega\tau/2$ . Модулът на  $d_n$  е

$$|d_n| = \frac{A\tau}{T_p} \left| \text{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right) \right|.$$

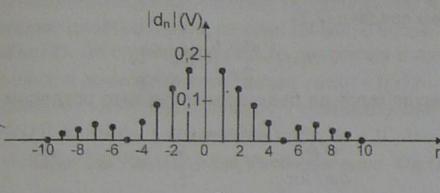
Начертан е на фиг. 2.1б. Величината  $(0.5 - x)$  е фазовият ъгъл, който съответства на  $n$ -тата хармонична компонента. Този ъгъл може да се начертава графиката на функцията на фазовия ъгъл в зависимост от номера на хармоника  $n$ , разглежда се специален случай  $x=0$ , т.е. началото на отчитане на времето съвпада със закъснението

фронта на импулса и нека  $t=T/5$ . Тогава

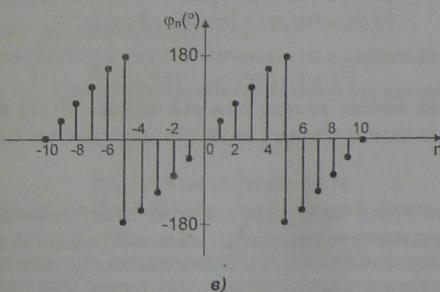
$$\varphi_n = \frac{n\omega\tau}{2} = n \frac{2\pi}{T_p} \frac{\tau}{2} = n \frac{2\pi}{T_p} \frac{1}{5} \frac{2}{2} = \frac{n}{5}\pi.$$



a)



б)



в)

Фиг. 2.1. а) Сигналът  $f(t)$ ; б) Амплитуден спектър  $|d_n|$ ; в) Фазов спектър  $\varphi_n$

ъгълът  $\varphi_n$  е начертан на фиг. 2.1в, където  $-180^\circ \leq \varphi_n \leq 180^\circ$ . Изборът на различно координатно начало за отчитане на времето ще има за резултат различен фазов спектър –  $\varphi_n$  като функция на  $n$ .

Обикновено анализът се опростява, ако отчитането на времето съвпадне с центъра на симетрия, например със средната точка на импулса в периодичната импулсна редица. В разглеждания случай амплитудният

спектър – фиг. 2.1б, е четна функция, тъй като  $|d_n| = |d_{-n}|$ , докато функциите спектър – фиг. 2.1в, е нечетна функция, т.е.  $\varphi_n = -\varphi_{-n}$ . Фазовите компоненти представят относителните фазови ъгли на хармоничните компоненти една спрямо друга. В момента  $t$ , абсолютните стойности на фазовите ъгли са  $\{\varphi_n(0,5 - x) + n\omega t\}$  – от формула (2.2).

### 2.1.1. Преобразуване на Фурье

Редът на Фурье трябва да бъде видоизменен, когато сигналът не е периодичен. Най-интересен е случаите на единичен правоъгълен импулс, който може да бъде получен от периодичния сигнал на фиг. 2.1а, ако периодът  $T_p$  нараства до безкрайност. Тъй като  $T_p$  нараства, разстоянието между хармоничните компоненти  $1/T_p = \omega/2\pi$  намалява до  $\omega/2\pi$  и в крайна сметка става по към непрекъснатата променлива  $\omega$ , а амплитудният и фазовият спектър стават непрекъснати. Тогава  $d_n \rightarrow d(\omega)$ , когато  $T_p \rightarrow \infty$ . При тези видоизменения може да запишем предвид (2.3)

$$d(\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Тази формула може да бъде нормирана като разделим на  $d\omega/2\pi$ . Получаваме

$$\frac{d(\omega)}{d\omega/2\pi} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

$F(j\omega)$  е комплексна функция и се нарича интеграл на Фурье или често срещаното – преобразуване на Фурье. Ако въведем представянето

$$F(j\omega) = \operatorname{Re}(j\omega) + j \operatorname{Im}(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)},$$

където

$$|F(j\omega)| = [\operatorname{Re}^2(j\omega) + \operatorname{Im}^2(j\omega)]^{1/2}$$

и се измерва във волтове за херц, а не във волтове,  $|F(j\omega)|$  е пълтността на амплитудата и се нарича пълтност на амплитудния спектър. Съответстващите фазови ъгли са

$$\varphi(\omega) = \arctg[\operatorname{Im}(j\omega) / \operatorname{Re}(j\omega)].$$

Функцията  $|F(j\omega)|^2$  се измерва във  $V^2 \text{Hz}^{-2}$ . Така например нормирана електрическа мощност, т.е. мощността разсейвана от един резистор със стойност  $1\Omega$ , се измерва във  $V^2$ , което е равностойно на  $J \text{s}^{-1}$  или  $J \text{Hz}$ . Тук  $J$  съзначава джаули, единицата мярка за енергия. Тогава  $V^2 \text{Hz}^{-2}$  е  $J \text{Hz} \cdot J \text{Hz}^{-1} = W$ . Следователно  $|F(j\omega)|^2$  има единица мярка, равностойна на енергията  $\text{Hz}^{-1}$ .  $|F(j\omega)|^2$  е спектралната пълтност на енергията. Лицето на фигураната, затруднено от  $|F(j\omega)|$  и абсцисната ос  $f$ , в интервала от  $f_0 - df$  до  $f_0 + df$ , е средната стойност на напрежението за честотата  $f_0$ , а лицето заградено от  $|F(j\omega)|^2$  и показващите ограничителни условия, е средната стойност на енергията за честота  $f_0$ . Обикновено в спектралния анализ се чертае спектралната пълтност на енергията като функция на честотата.

**Пример 2.2.** Да се пресметне пълтността на амплитудния спектър, като се използват формула (2.9) и фиг. 2.1а. Можем да запишем

$$F(j\omega) = \int_{-(t-x)}^{t} A e^{-j\omega t} dt, \quad (2.13)$$

която се различава от (2.6) само по константата  $1/T_p$ . Решението на интеграла е

$$F(j\omega) = A t e^{j\omega(t/2 - x)}, \quad (2.14)$$

което представлява  $d_n$ , но умножен с множителя  $T_p$ . Това съответства на факта, че  $|F(j\omega)|$  се измерва във волтове, умножени с времето или  $\text{VHz}^{-1}$ . Между другото, резултатът (2.14) може да бъде получен по-просто, отколкото беше получена формула (2.7), ако се използват някои свойства на Фурьеровото преобразуване. Така импулс с широчина  $\tau$  и височина единица, центриран в  $t=0$  и означен като  $\operatorname{rect}(t/\tau)$  има Фурьерово преобразуване  $\tau \operatorname{Sa}(\omega \tau/2)$ . Тъй като функцията  $Af(t)$  има преобразуване  $A \operatorname{F}[f(t)]$ , където  $F$  означава Фурьерово преобразуване, тогава импулс с височина  $A$  има преобразуване  $A \tau \operatorname{Sa}(\omega \tau/2)$ . За случая на фиг. 2.1а, импулсът е преместен наляво с  $\tau/2 - xt$  и е всъщност правоъгълният импулс  $\operatorname{rect}[t + ((\tau/2 - xt)/\tau)]$ . Свойството преместване на Фурьеровото преобразуване твърди, че  $f(t - t_0) = e^{-j\omega t_0} F[f(t)]$  за импулс, преместен надясно с  $t_0$ . Ако приложим това свойство за  $A \tau \operatorname{Sa}(\omega \tau/2)$  ще получим необходимото Фурьерово преобразуване

$$F(j\omega) = e^{j\omega(\tau/2 - xt)} A \tau \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) = A \tau e^{j\omega(\tau/2 - x)} \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right),$$

а това е същият резултат, както (2.14).

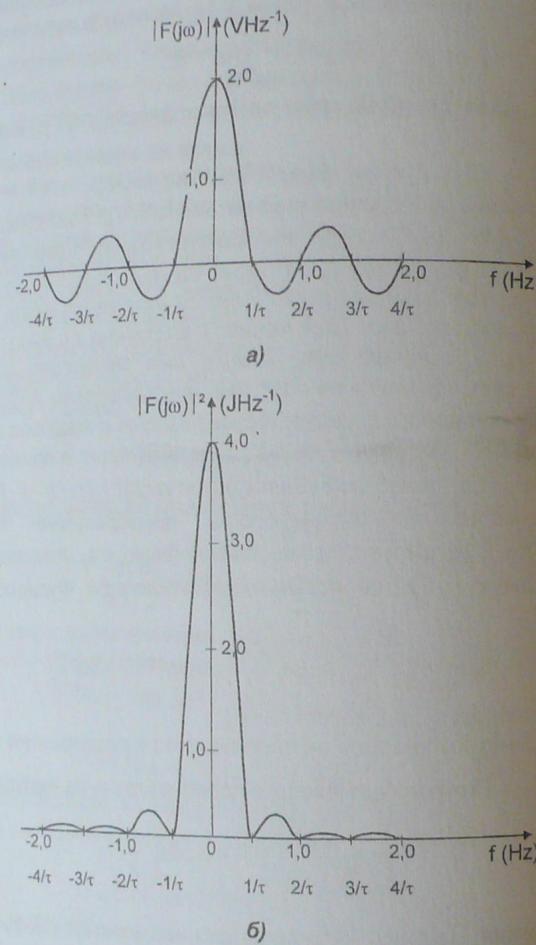
Ако координатното начало на времевата ос е разположено в центъра на импулса, т.е.  $x = \frac{1}{2}$ , тогава Фурьеровото преобразуване на импулса е

$$F(j\omega) = \frac{\sin(\omega \tau/2)}{\omega \tau/2} = A \tau \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \quad (2.15)$$

и е реална функция. На фиг. 2.2а е начертана непрекъснатата функция  $|F(j\omega)|$  за стойностите  $A=1V$ ,  $T_p=10s$  и  $\tau=2s$ . Този спектър на амплитудите, чиято форма е пропорционална на дискретизираната функция е винаги свързан с правоъгълните импулси и също с всеки сигнал с крайна дължина  $\tau$ . Последният може да бъде разглеждан като безкраен сигнал, умножен с  $\operatorname{rect}[t \pm t_0]/\tau$ , т.е. с единичен импулс. Експериментално получените сигнали спадат в тази категория, тъй като имат крайна дължина  $\tau$ . Дискретизираната функция преминава през нулата, когато  $\sin(\omega \tau/2) = 0$ , т.е. когато  $\omega \tau/2 = m\pi$  ( $m \neq 0$ ,  $m$  – цяло число). Следователно, амплитудата има нулева стойност в точките  $f=1/\tau, 2/\tau, 3/\tau, \dots$ . Когато  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\sin(\omega \tau/2) \rightarrow \omega \tau/2$  и  $\operatorname{Sa}(\omega \tau/2) = \sin(\omega \tau/2) / (\omega \tau/2) \rightarrow 1$ , така че  $F(j\omega) = A\tau$  за  $\omega=0$ , т.е. за  $f=0$ .

Спектралната пълтност на енергията на импулс с амплитуда  $2V$  е начертана на фиг. 2.2б за сравнение със спектралната пълтност на амплитудата на

фиг.2.2а.



Фиг. 2.2. а) Амплитуден спектър на импулс с големина 2V;  
б) Енергийен спектър на импулс с големина 2V

Възможно е да извършим преобразуване от честотната област във времевата област, като се използва обратното преобразуване на Фурье. В този случай

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

## 2.2. Дискретно преобразуване на Фурье. Обратно дискретно преобразуване на Фурье

В практиката Фуриеровите компоненти се получават по-често като резултат от цифрови изчисления, отколкото чрез аналогова обработка на

формацията. Тъй като аналоговият сигнал се състои от безкрайно число точки, представянето на всички техни стойности е практически невъзможно. Следователно аналоговият сигнал трябва да бъде дискретизиран през равни интервали и след това дискретните стойности да се представят в двоичен код. Това се постига като се използва дискретизираща схема със запомняне, последвана от аналого-цифров преобразувател (АЦП). В този случай, ако броят на отчетите се записва с достатъчно висока скорост, сигналът ще бъде представен адекватно. Теоретично, необходимата скорост на дискретизиране се нарича *скорост на Найкуист* и е равна на  $2f_{max}$ , където  $f_{max}$  е честотата на синусоидалната компонента с най-висока честота в сигнала с достатъчно голяма амплитуда. Ще предполагаме, че разполагаме със стойностите на отчетите, които се преобразуват и няма да се занимаваме с такъв въпрос като функция на прозореца, необходим за спектралния анализ. Така данните, които трябва да се преобразуват са дискретни и най-често непериодични. Фуриерово преобразуване не може да се приложи, тъй като то е предназначено за непрекъснати сигнали. В този случай се използва аналогично преобразуване, наречено *дискретно преобразуване на Фурье (ДПФ)*, което оперира с дискретни данни, т.е. с отчети.

Да предположим, че в резултат на дискретизирането на аналоговия сигнал  $x(t)$  с еднакъв времеви интервал  $T$  се получава редицата  $\{x(nT)\}=x(0), x(T), \dots, x[(N-1)T]$ , където  $n$  е номерът на отчета, който се променя от  $n=0$  до  $n=N-1$ . Членовете на редицата  $x(nT)$  ще бъдат реални само, когато представляват стойностите на времева редица, такава като сигнала на напрежението. ДПФ на  $x(nT)$  се дефинира като редицата с комплексни членове  $\{X(k\Omega)\}=X(0), X(\Omega), \dots, X[(N-1)\Omega]\}$  в честотната област, където  $\Omega$  е първият хармоник с честота  $\Omega=2\pi NT$ . Следователно, редицата  $X(k\Omega)$  има реална и имагинерна част, така че за  $k$ -тият хармоник може да се запише

$$X(k) = R(k) + jI(k), \quad (2.17)$$

и

$$|X(k)| = [R^2(k) + I^2(k)]^{1/2}, \quad (2.18)$$

а фазовият ъгъл е

$$\varphi(k) = \arctg[I(k)/R(k)], \quad (2.19)$$

където  $X(k)$  е краткото означение на  $X(k\Omega)$ . Тези формули са аналогични на формулите за Фуриерово преобразуване на аналогови сигнали (2.10) – (2.12).

Ще отбележим, че  $N$ -те реални отчета във времевата област се преобразуват в  $N$  комплексни стойности на ДПФ в честотната област. Стойностите на ДПФ  $X(k)$  се дефинират по следния начин

$$X(k) = F_D[x(nT)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jkn\Omega T}, \quad k=0, 1, \dots, N-1, \quad (2.20)$$

където  $F_D$  означава дискретното преобразуване на Фурье. В тази формула  $k$  е номерът на хармоника на преобразуваната компонента. Формулата може да бъде разглеждана като аналог на Фуриерово преобразуване на формула (2.9), когато  $f(t)=0$  за  $t < 0$  и  $t > (N-1)T$  чрез заместването  $x(nT)=f(t)$ ,  $k\Omega=\omega$  и  $nT=t$  и поради това може да се очаква, че двете преобразувания ще имат подобни свойства. Обаче, преобразуванията не са еднакви. Тогава, като извършим тези замествания в (2.9), положим  $dt=T$  и заместим интеграла със сума, получава-

ваме

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j\omega nT} = F(j\omega),$$

за  $0 \leq n \leq (N-1)T$ . Сравнението на (2.20) с (2.21), показва че

$$F(j\omega) = T X(k)$$

и следователно компонентите на Фуриерово преобразуване са свързани компонентите на ДПФ чрез интервала на дискретизиране и може да бъдат получени като умножим компонентите на ДПФ с интервала на дискретизиране.

**Пример 2.3.** Да илюстрираме използването на формула (2.20) за вършване на ДПФ на редицата  $\{1, 0, 0, 1\}$ . Да приемем, че тези данни представляват четири последователни стойности на напрежението  $x(0), x(T), x(2T), x(3T)$ , записани през равни времеви интервали  $T$ . Следователно  $N=4$ . Да се намерят комплексните стойности  $X(k)$  за  $k=0, k=1, k=2, k=3$ , тъй като  $N=3$ . За  $k=0$ , от формула (2.20) се получава

$$X(0) = \sum_{n=0}^3 x(nT) e^{-jn0} = \sum_{n=0}^3 x(nT) = x(0) + x(T) + x(2T) + x(3T) = 1 + 0 + 0 + 1 = 2,$$

така че  $X(0)=2$  е реална величина с амплитуда 2 и фазов ъгъл  $\phi(0)=0$ .

За  $k=1$ , от формула (2.20) се получава

$$X(1) = \sum_{n=0}^3 x(nT) e^{-jn\pi} = j \frac{\pi}{2} \text{ и } \phi(1) = -90^\circ$$

Интервалът  $T$  не е зададен, но може да бъде елиминиран, ако се ползва, че  $\Omega = 2\pi/NT$ . Тогава

$$\begin{aligned} X(1) &= \sum_{n=0}^3 x(nT) e^{-j\Omega n 2\pi/N} = \sum_{n=0}^3 x(nT) e^{-j2\pi n/N} = 1 + 0 + 0 + 1 e^{-j3\pi/2} = \\ &= 1 + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 + j. \end{aligned}$$

Елементът  $X(1)=1+j$  е комплексно число с модул  $\sqrt{2}$  и фазов ъгъл  $\phi(1) = \arctg 1 = 45^\circ$ . За  $k=2$ , от формула (2.20) се получава

$$\begin{aligned} X(2) &= \sum_{n=0}^3 x(nT) e^{-j2\omega nT} = \sum_{n=0}^3 x(nT) e^{-j2n\pi/N} = \sum_{n=0}^3 x(nT) e^{-j4\pi n/N} = \\ &= 1 + 0 + 0 + 1 e^{-j4\pi n/N} = 1 + 0 + 0 + e^{-j2\pi} = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Следователно  $X(2)=0$  има модул 0 и фазов ъгъл  $\phi(2)=0$ . Накрая за  $k=3$  се получава

$$X(3) = \sum_{n=0}^3 x(nT) e^{-j3n\pi/N} = 1 + 0 + 0 + e^{-j3\pi/2} = 1 - j.$$

Следователно  $X(3)=1-j$  има модул  $\sqrt{2}$  и фазов ъгъл  $\phi(3) = -45^\circ$ . В заключение, времевата редица  $\{1, 0, 0, 1\}$  има ДПФ редицата с комплексни членове  $\{2, 1+j, 0, 1-j\}$ .

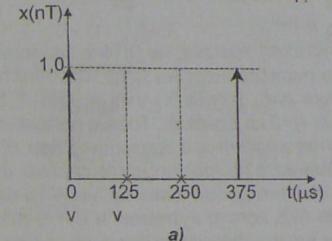
Общоприето е ДПФ да се представя чрез графиките на  $|X(k)|$  като функция на  $k\Omega$  и  $\phi(k)$  като функция на  $k\Omega$ .

Това може да бъде направено като се означат хармониците на честотата, ако  $\Omega$  е известна величина. За да намерим  $\Omega$  е необходимо знаем стойността на  $T$ , т.е. интервала на дискретизиране. Ако предположим че горната редица е дискретизирана с честота  $8kHz$ , тогава  $T=1/(8 \cdot 10^3) = 125 \mu s$ .

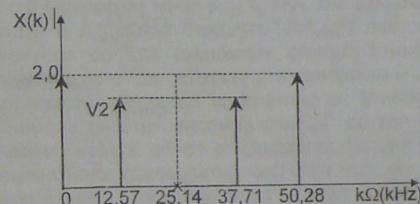
В този случай

$$\Omega = 2\pi / NT = 2\pi / (4 \cdot 125 \cdot 10^{-6}) = 12,57 kHz.$$

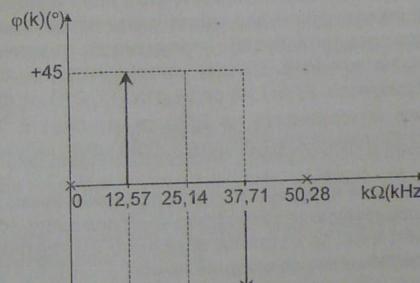
Откъдето  $2\Omega = 25,14 kHz$ , а  $3\Omega = 37,71 kHz$ . На фиг. 2.3a е начертана графиката на  $x(nT)$  като функция на  $t$ , на фиг. 2.3б –  $|X(k)|$  като функция на  $k\Omega$  и на фиг. 2.3в –  $\phi(k)$  като функция на  $k\Omega$ . Ще отбележим, че функцията от фиг. 2.3б е симетрична спрямо втората хармонична компонента, т.е. спрямо хармоничния номер  $N/2$ , а така също, че фазовият ъгъл от фиг. 2.3в е нечетна функция, центрирана спрямо тази компонента. Тези изводи могат да се обобщят.



a)



b)



c)

Фиг. 2.3. a)  $x(nT)$  като функция на  $t$ ; б)  $|X(k)|$  като функция на  $k$ , в)  $\phi(k)$  като функция на  $k$

Едно важно свойство на ДПФ може да бъде изведено, ако  $k$ -тата компонента на ДПФ  $X(k)$  се сравни с  $(k+N)$ -тата компонента  $X(k+N)$ :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jkn\omega T} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk2\pi n/N},$$

$$X(k+N) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk2\pi n/N} e^{-jN2\pi n/N} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk2\pi n/N} e^{-j2\pi n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk2\pi n/N} = X(k),$$

тъй като  $n$  е цяло число  $e^{-j2\pi n} = 1$ .

Равенството  $X(k+N)=X(k)$  показва, че ДПФ е периодична функция с период  $N$ . Това е свойството периодичност на ДПФ. Стойностите на компонентите на ДПФ се повтарят. Ако  $k=0$ , тогава  $k+N=N$  и  $X(0)=X(N)$ . В горния пример  $X(0)=2$  и следователно  $X(4)=2$  са еднакви. Това е показано на фиг.2.3б, където амплитудата на четвъртия хармоник е маркирана при  $50,28\text{kHz}$ . Очевидна е симетрията в разпределението на амплитудите спрямо втория хармоник. От това заключение е, че амплитудният спектър на  $N$ -точковото ДПФ е симетричен спрямо хармоника  $N/2$ , когато нулевият и  $(N+1)$ -ят хармоник са дадени на чертежа. По подобен начин, фазовата функция, която е нечетна, е симетрична спрямо хармоника  $N/2$ . Ако  $2f_{max}$  отчети за секунда бяха взети от сигнала за  $t$  секунди, тогава  $2f_{max}t=N$ , откъдето  $1/t=2f_{max}N$  е честотата на първия хармоник. Симетрията спрямо хармоника  $N/2$  се получава за честотата  $(N/2)/(2f_{max}N) = f_{max}$  – максималната честота, която съществува в сигнала. Така всички компоненти на сигнала са представени изцяло в амплитудни спектър, начертан чак до  $f_{max}$  или компонентата на хармоника  $N/2$ , то не е необходимо да се чертаят следващите точки. В този смисъл,  $f_{max}$  се нарича честота на прегъване, тъй като спектърът между хармониците  $N/2$  и  $N$  може да бъде прегънат спрямо оста на симетрия, която минава през точката  $f_{max}$ . Това да се наложи точно върху нискочестотната половина на спектъра. Сега вече ясно, че  $N$  реални дискретни данни се преобразуват в  $N/2$  комплексни числа на ДПФ, които имат практическа значимост. Така получената редица има  $N$  реални числа и  $N/2$  имагинерни числа, които дават общо  $N$  комплексни числа – елементите на комплексната редица, получена от първоначалната  $N$ -точкова редица с реални членове. Накрая, стойностите на компонентите на Фуриерово преобразуване  $F(j\omega)$  на редицата  $\{1,0,0,1\}$  от фиг.2.3, могат да бъдат получени като компонентите на ДПФ се умножат с  $T=125\mu\text{s}$ . Тогава  $F(0)=250\mu\text{V}\text{Hz}^{-1}$ ,  $F(12,57\text{kHz})=(125+j125)\mu\text{V}\text{Hz}^{-1}$ ,  $F(25,14\text{kHz})=0\text{V}\text{Hz}^{-1}$ ,  $F(37,71\text{kHz})=(125-j125)\mu\text{V}\text{Hz}^{-1}$ .

Беше посочено, че е необходимо също да имаме възможност да извършим дискретно преобразуване от честотната във времевата област.

Това се постига като се използва обратното дискретно преобразуване на Фурие (ОДПФ), дефинирано по следния начин

$$X(nT) = F_D^{-1}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jkn\omega T}, \quad n=0, 1, \dots, N-1, \quad (2.23)$$

Където  $F_D^{-1}$  означава обратното дискретно преобразуване на Фурие. Обратното дискретно преобразуване на Фурие се получава от ОДПФ чрез деление на ОДПФ с  $T$ . Валидността на формула (2.23) може да бъде проверена като

заместим  $x(nT)$  в (2.20).

**Пример 2.4.** Нека илюстрираме ОДПФ като го използваме за получаване на времевата редица  $\{1,0,0,1\}$ , ако са известни компонентите на ДПФ  $\{2, 1+j, 0, 1-j\}$ .

За  $n=0$  имаме

$$\begin{aligned} x(nT) &= x(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) = \frac{1}{4} [X(0) + X(1) + X(2) + X(3)] = \\ &= \frac{1}{4} [2 + (1+j) + 0 + (1-j)] = 1, \end{aligned}$$

както се очаква. За  $n=1$  имаме

$$\begin{aligned} x(nT) &= x(T) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\omega T} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk2\pi/N} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\pi/2} = \\ &= \frac{1}{4} [2 + (1+j)e^{j\pi/2} + 0 + (1-j)e^{j3\pi/2}] = \frac{1}{4} [2 + (1+j)j + (1-j)(-j)] = \\ &= \frac{1}{4} [2 + j - 1 - j] = 0, \end{aligned}$$

както се очаква. За  $n=2$  имаме

$$\begin{aligned} x(nT) &= x(2T) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\omega T} = \frac{1}{4} [2 + (1+j)e^{j\pi} + (1-j)e^{j3\pi}] = \\ &= \frac{1}{4} [2 - (1+j) - (1-j)] = 0, \end{aligned}$$

както се очаква. За  $n=3$  имаме

$$\begin{aligned} x(nT) &= x(3T) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\omega T} = \frac{1}{4} [2 + (1+j)e^{j3\pi/2} + (1-j)e^{j9\pi/2}] = \\ &= \frac{1}{4} [2 + (1+j)(-j) + (1-j)] = \frac{1}{4} [2 - j + 1 + j + 1] = 1. \end{aligned}$$

Последният член на редицата е също верен.

### 2.3. Свойства на ДПФ

ДПФ има най-различни математически свойства, които се използват за опростяване на задачите или водят до полезни приложения. Някои от тях са дадени по-долу. За опростяване времевата редица  $x(nT)$  се записва като  $x(n)$ .

#### 1. Симетрия

$$\operatorname{Re}[X(N-k)] = \operatorname{Re} X(k), \quad (2.24)$$

където  $\operatorname{Re}$  означава реалната част на редицата. Равенство (2.24) утвърждава симетрията на амплитудния спектър, за която стана дума преди, и

$$\operatorname{Im}[X(N-k)] = -\operatorname{Im}[X(k)], \quad (2.25)$$

където  $\operatorname{Im}$  означава имагинерната част. Равенство (2.25) утвърждава антисиметрията на фазовия спектър.

#### 2. Дискретно Фуриерово преобразуване на четни функции

Ако  $x(n)$  е четна функция, означена с  $x_e(n)$ , т.е.  $x_e(n)=x_e(-n)$ , тогава

$$F_D[x_e(n)] = X_e(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_e(n) \cos(k\omega nT). \quad (2.26)$$

#### 3. Дискретно Фуриерово преобразуване на нечетни функции

Ако  $x(n)$  е нечетна функция, означена с  $x_o(n)$ , т.е.  $x_o(n)=-x_o(-n)$ , тогава

$$F_D[X_o(n)] = X_o(k) = -j \sum_{n=0}^{N-1} x_o(n) \sin(k\omega n T). \quad (2.2)$$

#### 4. Теорема на Парсевал

Нормираната енергия на сигнала се дефинира по следния начин

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2. \quad (2.2)$$

Дясната част на тази формула е средно аритметичното от квадратите на амплитудите на спектъра, докато лявата страна е сумата от квадратите на елементите на времевата редица.

#### 5. Дискретно Фуриерово преобразуване на $\delta$ функция:

$$F_D[\delta(nT)] = 1. \quad (2.2)$$

6. Линейната взаимна корелация на две времеви редици може да бъде пресметната като се използва ДПФ. Нека  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  са две крайни редици с всяка с дължина  $N$ . Тогава

$$r_{x_1 x_2}(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) x_2(n+j), \quad -\infty < j < \infty. \quad (2.3)$$

Кръговата корелация на две крайни редици се дефинира с формулата

$$r_{x_1 x_2}(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) x_2(n+j), \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (2.3)$$

и тя може да бъде пресметната като се използва ДПФ

$$r_{x_1 x_2}(j) = F_D^{-1}[X_1(k) X_2(k)]. \quad (2.3)$$

Формула (2.32) се нарича теорема за корелацията. Кръговата корелация може да бъде превърната в линейна корелация като се извърши допълване с нули. Ако времевите редици  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  имат дължини съответно  $N_1$  и  $N_2$ , тяхната линейна корелация ще има дължина  $N_1 + N_2 - 1$ . За целта  $x_1(n)$  се състои с  $x_{1a}(n)$ , която се състои от  $x_1(n)$  с прибавени  $N_2 - 1$  нули, а  $x_2(n)$  се допълва с  $N_1 - 1$  нули, за да стане  $x_{2a}(n)$ . Линейната взаимна корелация на  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  се дефинира с формулата

$$r_{x_1 x_2}(j) = F_D^{-1}[X_{1a}(k) X_{2a}(k)], \quad (2.3)$$

където

$$X_{1a}(k) = F_D[X_{1a}(n)] \quad \text{и} \quad X_{2a}(k) = F_D[X_{2a}(n)].$$

Този въпрос се разглежда по-пълно в Глава 3.

7. ДПФ може също да бъде използвано за пресмятане на кръгови конволюции, а чрез прибавяне на нули, и на линейни конволюции. Това може да се извърши, както във времева, така и в честотната област. Теоремата за конволюцията във времевата област е

$$X_3(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = F_D^{-1}[X_1(k) X_2(k)], \quad (2.3)$$

където  $\otimes$  означава кръгова конволюция, а  $x_1(n), x_2(n)$  и  $x_3(n)$  са крайни редици с еднаква дължина.

По подобен начин на (2.31) можем да запишем

$$X_3(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n-m). \quad (2.3)$$

Освен това,

$$X_3(k) = X_1(k) X_2(k), \quad (2.36)$$

$$\text{където } X_3(k) = F_D[X_3(n)].$$

Следващите формули съставляват теоремата за конволюцията в честотната област:

$$\frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k) = F_D[x_1(n) x_2(n)], \quad (2.37)$$

където

$$X_1(k) \otimes X_2(k) = \sum_{m=0}^{N-1} X_1(m) X_2(k-m). \quad (2.38)$$

От (2.34) може да се направи заключението, че конволюцията във времевата област е еквивалентна на умножение в честотната област, докато от формула (2.37) следва, че конволюцията в честотната област е еквивалентна на умножение във времевата област.

#### 2.4. Изчислителна сложност на ДПФ

За пресмятане на ДПФ са необходими голем брой умножения и събирания. Изразът за  $X(k)$ , когато  $N=8$  предвид формула (2.20) е

$$X(k) = \sum_{n=0}^7 x(n) e^{-jk2\pi n/8}, \quad k=0, 1, \dots, 7, \quad (2.39)$$

или след заместването  $k2\pi/8=K$  този израз ще изглежда така

$$X(k) = x(0) e^{-jk0} + x(1) e^{-jk1} + x(2) e^{-jk2} + x(3) e^{-jk3} + x(4) e^{-jk4} + x(5) e^{-jk5} + x(6) e^{-jk6} + x(7) e^{-jk7}, \quad k=0, 1, \dots, 7. \quad (2.40)$$

Равенство (2.40) съдържа осем члена в дясната страна. Всеки член е произведение от експоненциален множител, който е винаги комплексен, с множител, който е реален или комплексен (например, реален за случая на напрежението). Всички произведения след това се събират. Следователно има осем комплексни умножения и седем комплексни събирания. Ако ДПФ се извършва за  $N$ -точкова редица, броят на действията е съответно  $N$  и  $N-1$ . Броят на хармоничните компоненти, които се получават в резултат на изчисленията, е осем ( $k=0, \dots, 7$ ). За  $N$ -точковото ДПФ броят на хармониците е  $N$ . Следователно пресмятането на 8-точковото ДПФ изиска  $8^2=64$  комплексни умножения и  $8 \cdot 7 = 56$  комплексни събирания. За  $N$ -точковото ДПФ тези числа са съответно  $N^2$  и  $N(N-1)$ . Ако  $N=1024$ , тогава са необходими приблизително един милион комплексни умножения и един милион комплексни събирания. Очевидна е необходимостта от намаляване на тези числа. Броят на умноженията може да бъде намален, ако се отбележи, че съществува значителен брой членове, при които се извършва умножение с едно и също число. Например, ако  $k=1$  и  $n=2$ ,  $e^{-jk2\pi n/8} = e^{-jk\pi/2}$  и ако  $k=2$  и  $n=1$ ,  $e^{-jk2\pi n/8} = e^{-j\pi/2}$ .

#### 2.5. Алгоритъм за БПФ с децимация във времето

В тази точка ще покажем по какъв начин може да се намали изчислителната сложност на ДПФ и по този начин да се ускори изчислителния процес. Броят на изчислителните операции необходими за пресмятането на 1024-

точково ДПФ може да се намали 204,8 пъти, ако се използва алгоритъм името "бързо преобразуване на Фурье" или по-кратко БПФ. Когато той прилага във времевата област, алгоритъмът се нарича алгоритъм с десимация във времето (ДВВ) БПФ. Първият ДВВ алгоритъм е създаден от Коли Тъки през 1965 г. и носи техните имена. Децимацията води до значително намаляване броя на изчисленията, извършвани с данните във времевата област. Времето, което се икономисва при пресмятането се намалява  $N^2 \cdot (N/2) \log_2 N$ .

Специално ще направим някои опростявания в означенията.

Първоначално ще направим някои опростявания в означенията. Фу-  
мала (2.20) може да бъде записана по следния начин

$$X_r(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi nk/N}, \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (2.4)$$

Въвеждаме означението

$$W_N = e^{-j2\pi/N}. \quad (24)$$

Тогава (2.41) се записва така

$$W_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk}, \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (24)$$

Ако се вземе предвид новото означение, могат да се установят следните връзки за различните степени на  $W_N$ :

$$W_N^2 = \left(e^{-j2\pi/N}\right)^2 = e^{-j2\pi 2/N} = e^{-j2\pi/(N/2)} = W_{N/2}, \quad (2.4)$$

$$W_N^{(k+N/2)} = W_N^k W_N^{N/2} = W_N^k e^{-j(2\pi/N)(N/2)} = W_N^k e^{-j\pi} = -W_N^k \quad (24)$$

или подредени още веднъж

$$W_N = e^{-j2\pi/N}, \quad (2.46)$$

$$W_N^2 = W_{N/2}, \quad (2.46)$$

$$W_N^{(k+N/2)} = -W_N^k. \quad (2.46)$$

С цел намаляване изчислителната сложност чрез използване на формулите (2.46), редицата на входните данни се разделя на две еднакви редици – едната съставена от членовете, стоящи на четни места и другата – на нечетни места. Ако първоначалната редица има четен брой членове, то новополучените редици също ще съдържат четен брой членове. Ако първоначалната редица има нечетен брой членове, то чрез добавяне на нули нечетната редица може да бъде разширена до четна. Това дава възможност ДПФ на редицата  $X_1(k)$  да бъде представено чрез ДПФ на редицата, съставена от елементите, стоящи на четни места  $X_{11}(k)$  и ДПФ на редицата, съставена от елементите, стоящи на нечетни места –  $X_{12}(k)$  – табл. 2-1. Следователно  $N$ -точковото ДПФ се представя чрез две  $N/2$ -точкови ДПФ. Този процес се повтаря до като редицата  $X_1(k)$  се разложи на  $N/2$  на брой ДПФ, всяко от които се състои от две точки, като и двете са елементи на входната редица. На практика входните данни се групират така, че  $N/2$  на брой двуточкови ДПФ се преминават като се вземат данните по двойки. Изходите на тези елементарни клетки за ДПФ се комбинират по подходящ начин, за да се получат  $N/4$  на брой четириточкови клетки за ДПФ, които на свой ред се комбинират, за да се получат  $N/8$  на брой осемточкови клетки за ДПФ и т.н., докато се достигне накрая до  $N$ -точковото ДПФ на  $X_1(k)$ . Във всеки от етапите участват общи множители, които са степени на  $W_N$ , за да се намали броят на комплексните умножения. Така процедура се обяснява със следните разсъждения.

Таблица 2.1. Структура на 8-точково БПФ

<b>№</b>	<b>Съдържание</b>								<b>k</b>	<b>N</b>			
1.	Редица на данните $A_0$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$0, \dots, 7$			
2.	8-точково ДПФ на $A_0$	$X_1(k) = X_{11}(k) + W_N^k X_{12}(k)$							$0, \dots, N-1$ $(0, \dots, 7)$	$0, \dots, 7$			
3.	Пренареждане на $A_0$ : две редици $A_1$ и $A_2$	$A_1$	$x_0$	$x_2$	$x_4$	$x_6$	$A_2$	$x_1$	$x_3$	$x_5$	$x_7$		
4.	4-точково ДПФ на $A_1$ и $A_2$	$X_{12}(k) = X_{21}(k) + W_{N/2}^k X_{22}(k)$							$X_{23}(k) = X_{23}(k) + W_{N/4}^k X_{24}(k)$	$0, \dots, N/2-1$ $(0, \dots, 3)$			
5.	Пренареждане на редиците $A_1$ и $A_2$ : четирите редици $A_3, A_4, A_5, A_6$	$A_3$	$x_0$	$x_4$	$A_4$	$x_2$	$x_6$	$A_5$	$x_1$	$x_5$	$A_6$	$x_3$	$x_7$
6.	Двуючково ДПФ на $A_3, A_4, A_5, A_6$	$X_{21}(k) = X_0 + W_{N/4}^k X_4$							$X_{23}(k) = X_1 + W_{N/4}^k X_5$	$X_{24}(k) = X_3 + W_{N/4}^k X_7$	$0, \dots, N/4-1$ $(0, 1)$		

Индексите  $n$  във формула (2.43) се променят от  $n=0$  до  $n=N-1$ , което отговаря на данните със стойности  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}$ . Елементите  $x_0, x_2, \dots, x_{N-2}$  съдържат  $N/2$  точки, а  $x_1, x_3, \dots, x_{N-1}$  – на нечетни места. Двете редици – от общия член  $x_{2n}$  като се замести с  $n=0$  до  $n=N/2-1$ , а тези на нечетната редица – от общия член  $x_{2n+1}$ . Тогава за формула (2.43) можем да запишем

$$X_{11}(k) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} W_N^{2nk}}_{\text{четна редица}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} W_N^{(2n+1)k}}_{\text{нечетна редица}} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} W_N^{2nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} W_N^{2nk}, \quad k=0, \dots, N-1. \quad (2.47)$$

Ако се вземе предвид (2.46б), че  $W_N^{2nk} = W_{N/2}^{nk}$  за (2.47) може да запишем

$$X_{11}(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} W_{N/2}^{nk}, \quad k=0, \dots, N-1. \quad (2.48)$$

Тогава (2.48) ще придобие вида

$$X_{11}(k) = X_{11}(k) + W_N^k X_{12}(k), \quad k=0, \dots, N-1. \quad (2.49)$$

От сравнението на формули (2.49) и (2.43) се вижда, че  $X_{11}(k)$  е ДПФ на четната редица, а  $X_{12}(k)$  е ДПФ на нечетната редица. Следователно, как беше посочено по-рано, ДПФ на  $X_{11}(k)$  може да бъде представено чрез два ДПФ:  $X_{11}(k)$  и  $X_{12}(k)$ . Множителят  $W_{N/2}^k$  участва и в двета случая и следователно е необходимо да се пресметне само веднъж.

Таблица 2-1 илюстрира процеса за случаи на 8-точково ДПФ. Първия ред съдържа входните данни, а вторият ред дава формулата за ДПФ на тези данни, изразени чрез ДПФ на четната и нечетната редица, съответно обозначени с  $X_{11}(k)$  и  $X_{12}(k)$ . Третият ред показва процеса на групиране на входните данни, от които се получават  $X_{11}(k)$  и  $X_{12}(k)$ . Четвъртият ред показва как се получават ДПФ на данните за редиците от трети ред чрез ДПФ на тези четни и нечетни редици –  $X_{21}(k), X_{22}(k), X_{23}(k)$  и  $X_{24}(k)$ . Тези редици са показани в петия ред и се вижда, че те са задължително 2-точкови редици чието ДПФ са  $X_{21}(k), X_{22}(k), X_{23}(k)$  и  $X_{24}(k)$  и са представени чрез входните данни в шестия ред. Следователно, 8-точковото ДПФ се разлага на четири 2-точкови ДПФ, всяко от които произвежда две стойности, например  $X_{21}(0), X_{21}(1)$  за случаи на  $X_{11}(k)$ . Този процес включва две разложения и теглови множители  $W_N^k$ , които се повдигат на квадрат за всеки етап. Ако разгледаме шести ред, ще установим, че

$$X_{21}(k) = x_0 + W_{N/4}^k x_4, \quad k=0, \dots, N/4-1, \quad \text{т.е. } k=0, 1. \quad (2.50)$$

Следователно  $X_{21}(0) = x_0 + x_4$ , докато

$$X_{21}(1) = x_0 + W_{N/4}^1 x_4 = x_0 + e^{-j2\pi/2} x_4 = x_0 + e^{-j\pi} x_4 = x_0 - x_4.$$

По подобен начин се получават:

$$\begin{aligned} X_{22}(0) &= x_2 + x_6 \\ X_{23}(0) &= x_1 + x_5 \\ X_{24}(0) &= x_3 + x_7 \end{aligned} \quad \begin{aligned} X_{22}(1) &= x_2 - x_6 \\ X_{23}(1) &= x_1 - x_5 \\ X_{24}(1) &= x_3 - x_7 \end{aligned}$$

откъдето се вижда, че стойностите за  $k=1$  се различават от стойностите за  $k=0$  само по знака. Тази закономерност се забелязва и за  $X_{11}(k)$ , ( $k=0, 1, 2, 3$ ).

Действително

$$X_{11}(k) = X_{21}(k) + W_{N/2}^k X_{22}(k), \quad (2.51)$$

откъдето

$$X_{11}(0) = X_{21}(0) + W_{N/2}^0 X_{22}(0) = X_{21}(0) + X_{22}(0), \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} X_{11}(1) &= X_{21}(1) + W_{N/2}^1 X_{22}(1) = X_{21}(1) + e^{-j\pi/2} X_{22}(1) = \\ &= X_{21}(1) - jX_{22}(1), \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} X_{11}(2) &= X_{21}(2) + W_{N/2}^2 X_{22}(2) = X_{21}(2) + e^{-j(2\pi/8)^2 \times 2} X_{22}(2) = \\ &= X_{21}(2) + e^{-j\pi} X_{22}(2) = X_{21}(2) - X_{22}(2). \end{aligned} \quad (2.54)$$

По същия начин се установява, че

$$X_{21}(2) = x_0 + W_{N/4}^2 x_4 = x_0 + W_2^2 x_4 = x_0 + x_4 = X_{21}(0)$$

и

$$X_{22}(2) = x_2 + W_{N/4}^2 x_6 = x_2 + x_4 = X_{22}(0).$$

Следователно уравнение (2.54) е еквивалентно на следните две уравнения

$$X_{11}(2) = X_{21}(0) - X_{22}(0), \quad (2.55)$$

$$X_{11}(3) = X_{21}(3) + W_{N/2}^3 X_{22}(3). \quad (2.56)$$

По-нататък установяваме, че

$$X_{21}(3) = x_0 + W_{N/4}^3 x_4 = x_0 + e^{-j(2\pi/8)^3} x_4 = x_0 + e^{-j3\pi} x_4 = x_0 - x_4 = X_{21}(1)$$

и

$$X_{22}(3) = x_2 - x_6 = X_{22}(1).$$

Следователно уравнение (2.56) е еквивалентно на уравнението

$$X_{11}(3) = X_{21}(1) + e^{-j(2\pi/4)^3} X_{22}(1) = X_{21}(1) - e^{-j3\pi/2} X_{22}(1) = X_{21}(1) + jX_{22}(1). \quad (2.57)$$

Да подредим получените уравнения едно под друго

$$X_{11}(0) = X_{21}(0) + X_{22}(0) = X_{21}(0) + W_8^0 X_{22}(0), \quad (2.58a)$$

$$X_{11}(2) = X_{21}(0) - X_{22}(0) = X_{21}(0) - W_8^0 X_{22}(0), \quad (2.58b)$$

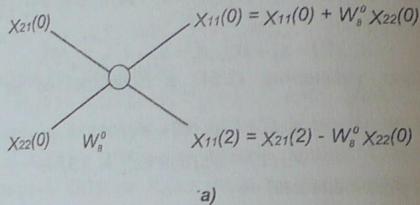
$$X_{11}(1) = X_{21}(1) - jX_{22}(1) = X_{21}(1) + W_8^1 X_{22}(1), \quad (2.58c)$$

$$X_{11}(3) = X_{21}(1) + jX_{22}(1) = X_{21}(1) - W_8^2 X_{22}(1). \quad (2.58d)$$

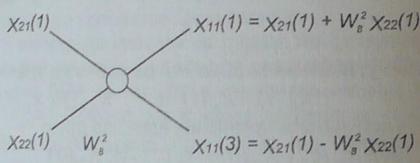
От тези уравнения се вижда по какъв начин ДПФ на  $X_{11}(k)$  зависи от ДПФ на четната и нечетната редица, и че  $X_{11}(0)$  и  $X_{11}(2)$  се определят с общ израз, като разликата е само в знака. Същото заключение може да се направи за  $X_{11}(1)$  и  $X_{11}(3)$ . Прави впечатление, че в лявата част подреждането е  $X_{11}(0), X_{11}(2), X_{11}(1), X_{11}(3)$ , т.е. разменени са местата на  $X_{11}(1)$  и  $X_{11}(2)$ . По този начин като се започне с входните данни, групирани по двойки, се формират  $X_{21}(k), X_{22}(k), X_{23}(k)$  и  $X_{24}(k)$ . След това се намират  $X_{11}(k)$  и  $X_{12}(k)$  и накрая –  $X_{11}(k)$ . Броят на комплексните умножения и събирания се намалява по следните причини: 1. Съставените по този начин уравнения съдържат повторящи се множители  $W_N$  на съответни степени; 2. Използват се равенства от вида  $X_{21}(2) = X_{21}(0)$  и  $X_{21}(3) = X_{21}(1)$ ; 3. Математическите изрази за различните двойки се различават само по знака. Този алгоритъм е известен като алгоритъм на Коли-Тъки.

### 2.5.1. Фигурата "пеперудка"

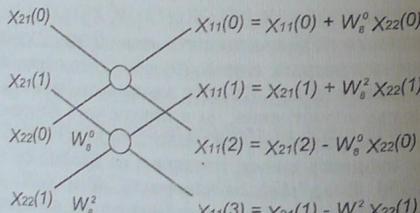
Уравненията (2.58) могат да бъдат представени графично като се ползва симетрията спрямо знака, по който се различават и като се вземат предвид уравненията за двойките входни данни. Изходните данни, определени с (2.58a) и (2.58b) са изразени чрез входните данни  $X_{21}(0)$  и  $X_{22}(0)$ . Това е показано на фиг. 2.4a. Входните данни постъпват отляво на възела, а изходните се намират отдясно. От фиг. 2.4б се вижда как се получават изходните данни  $X_{11}(1)$  и  $X_{11}(3)$  чрез граф. Ако се наложат фиг. 2.4a и фиг. 2.4б, се получава фиг. 2.4в, от която се вижда, че изходните данни на ДПФ са подадени по нарастваща стойност на  $k$ . Структурите от фиг. 2.4a и фиг. 2.4б са известни като "пеперудки", тъй като напомнят символите на представяне на насекомо. На фиг. 2.5 е даден графът на 8-точковото БПФ.



a)



b)

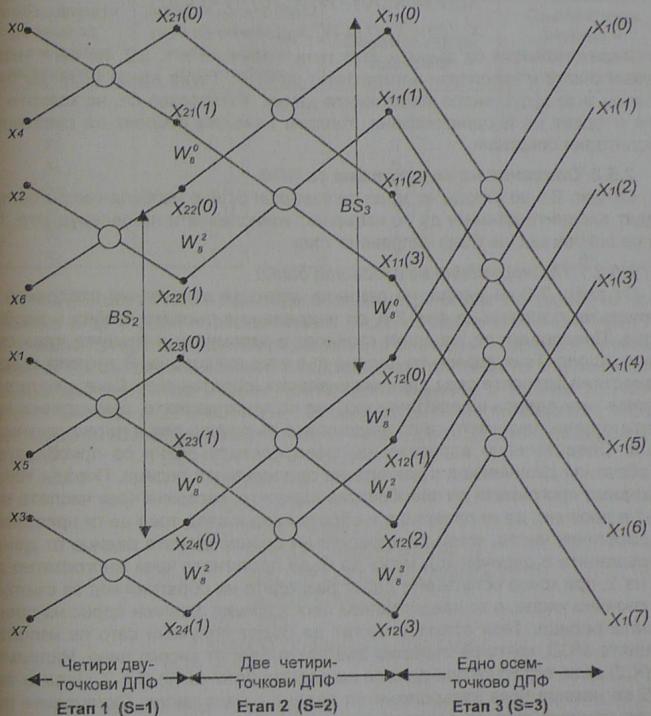


c)

Фиг. 2.4. Пеперудките на БПФ

Пример 2.5. Да се намери ДПФ на редицата  $\{1, 0, 0, 1\}$ , която вече е направено в т.2.2, като се използва алгоритъмът за БПФ с децимация

времето. Това представлява четирироточково ДПФ с входни данни  $x_0=1, x_1=0, x_2=0, x_3=1$  и  $X_1(k)=X_{11}(k)+W_N^k X_{12}(k)$ ,  $k=0, 1, 2, 3$ . Пренаредената редица е  $x_0, x_2, x_1, x_3$ .



Фиг. 2.5. Пеперудките на БПФ за 8-точково ДПФ:

$BW_3$  – разстояние между точките в паметта, които подават сигнал в най-горната пеперудка на етап 3;  $BS_2$  – разстояние между долните точки на пеперудките в паметта на етап 2, които имат еднакви теглови множители

Започваме обяснението от горния ляв ъгъл на фиг. 2.5. Точките  $x_0, x_4, x_2, x_6$  се заместват с  $x_0, x_2, x_1, x_3$ . Търсени са стойности на ДПФ са  $X_{11}(0), X_{11}(1), X_{11}(2)$  и  $X_{11}(3)$ . Можем да запишем

$$X_{21}(0) = x_0 + x_2 = 1,$$

$$X_{21}(1) = x_0 - x_2 = 1,$$

$$X_{22}(0) = x_1 + x_3 = 1,$$

$$X_{\infty}(1) = X_1 - X_3 = -1$$

$$X_{22}(0) = X_{21}(0) + W_s^0 X_{22}(0) = 1 + 1 = 2,$$

$$X_{11}(1) = X_{21}(-1) + W_8^2 X_{22}(1) = 1 + e^{-j\pi/2}(-1) = 1 + j$$

$$X_{11}(1) = X_{21}(1) = \dots = 0$$

$$X_{11}(2) = X_{21}(1) - W_8^2 X_{22}(1) = 1 - j$$

Тези стойности са същите като тези, получени в т. 2.2, но сега това е направено като е използван алгоритъмът за БПФ. Такъв извод може да бъде направен и за друго число на входните данни. Установява се, че колкото по-голям е броят на входните данни, толкова по-голям е броят на спестените изчислителни операции.

### 3.5.3. Описание на алгоритъма за БПФ

От фиг. 2.5 се вижда, че за да се извърши БПФ е необходимо да се предварят входните данни и да се извършат изчисленията на пеперудките. По-долу се описва как ще бъде направено това.

#### 2.5.2.1 Пренареждане на входните данни

От табл. 2-2 се вижда, че данните, които се подават на входовете на пеперудките, показвани на фиг. 2.5, са подредени в първата колона в разбъркан ред. Предполага се, че всяка стойност е запомнена в паметта чрез своя двоичен адрес. Тези адреси са дадени във втората колона. В третата колона са поместени адресите след двоична инверсия (обратен код). Сега, ако преобразуваме тези адреси в десетичен код, ще получим данните, поместени в четвъртата колона, така както са подредени във възходящ ред в първоначалната редица. Следователно адресите на пренаредените данни се преобразуват чрез обратния двоичен код в данните на оригиналната редица. Поради това е необходимо програмата да преобразува адресите, изразени чрез числата от  $N-1$  в двоични, да ги превръща в обратен код и след това да ги преобразува в десетични числа, които са адресите на пренаредената редица от данни. Превръщането в двоичен код може да бъде постигнато чрез многократно деление на 2, при което остатъците дават разредите на обратния код за съответното двоично число, а то представлява необходимия двоичен адрес на пренаредената редица. Тези остатъци могат да бъдат получени като се използва функцията  $MOD$ , която се съдържа във всеки език от високо ниво. Например,  $MOD(K, 2)$  дава остатъка при деление на десетичното число  $K$  с 2. Цялата част на  $K/2$  се намира чрез извършване на деление с цяло число. Останалите разреди се намират като се повтаря този процес, докато се извършват  $log_2 N$  на брой деления. Това е така, тъй като редицата от данни се състои от  $2^m = N$  точки и всеки адрес изисква  $m$  разреда, които се получават чрез  $m$  на брой деления на 2, където  $m = \log_2 N$ . I-ият бит на новия адрес е двоичният коефициент на  $2^{m-1}$ , така че новият адрес ( $NADDR$ ) може да бъде намерен, като се използва DO цикъл за всяка отделна стойност на  $K$  ( $K=IADDR$ ), която се променя от  $I=0$  до  $I=m-1$ , и която приема стойностите на остатъците ( $RMNDR$ ) на последователните цели числа, получени след деленето на  $K=IADDR$  на двоичните остатъци. Псевдокодът, необходим за тази операция е

Дадената сума за тази операция е  

$$\text{DO FOR } I = 0 \text{ TO } m - 1$$

$$RMNDR := \text{MOD}(I\text{ADDR}, 2)$$

$$NADDR := NADDR + RMNDR \times 2^{m-1}$$

IADDR := IADDR / 2  
END DO

Таблица 2-2. Пренареждане на редицата чрез обратен код

Необходимата редица за пресмятане с пеперудки	Адреси на елементите на необходимата редица в двоичен код	Обратен код на адресите	Съответната редица = първоначалната редица от данни
$x_0$	0 0 0	0 0 0	$x_0$
$x_4$	1 0 0	1 0 0	$x_1$
$x_2$	0 1 0	0 1 0	$x_2$
$x_6$	1 1 0	0 1 1	$x_3$
$x_1$	0 0 1	1 0 0	$x_4$
$x_5$	1 0 1	1 0 1	$x_5$
$x_3$	0 1 1	1 1 0	$x_6$
$x_7$	1 1 1	1 1 1	$x_7$

Този *DO* цикъл трябва да бъде вложен вътре в друг *DO* цикъл, на който функцията е да отдели първоначалното число от целия масив *DATA(K)*,  $K=0$  до  $N-1$ , което представлява номера на точката от входните данни, а така също е номерът на съставния елемент в масива и съответства на първоначалния адрес на данните, и да въведе пренаредените данни в масива *NEWDATA(NADDR)*. Сега данните в *NEWDATA* са подредени точно така, както трябва да бъдат, за да се извърши пресмятането от пеперудките. Пълният псевдокод е

```

DO FOR K=0 TO N-1
    NADDR := 0
    IADDR := K
    DO FOR I=0 TO m-1
        RMNDR := MOD(IADDR,2)
        NADDR := NADDR + RMNDR * 2m-1-I
        IADDR := IADDR / 2
    END DO
    NEWDATA(NADDR) = DATA(K)
END DO

```

#### 2.5.2.2. Пресмятания с пеперудки

Пресмятанията с пеперудките включват следните три стъпки:

- ## 1. Пресмятане на тегловите множители

$$W_N^R = e^{-j(2\pi/N)R}$$

2. Изчисляване на пеперудките в разглеждания етап (вж. фиг. 2.5 за дефинициите на различните етапи);

- ### 3. Пресмятане на всички етапи

Ефективната процедура се състои в пресмятане на тегловите множители  $W_N^R$ , участващи в етапа и за всеки един от тях да се пресметнат всички пеперудки в етапа с този множител. След като се пресметнат всички пеперудки в този етап, процедурата се повтаря за всички етапи. Така например, ако се разглежда етап 2 от фиг. 2.5, трябва да се пресметнат тегловият коефициент

$W_s^0$  и двете пеперудки, в които участва  $W_s^0$ . След това трябва да се изчислят  $W_s^2$  и двете пеперудки, които съдържат този теглови коефициент. Тази процесура се изпълнява за всеки един от трите етапа, започвайки от етап 1 и непрекъснато редените данни. За да се постигне БПФ като се използва относително кратка програма, е необходимо да се използват някои интересни свойства на алгоритъма. Нека широчината на пеперудката  $BWIDTH$  представлява разстоянието на паметта между точките, участващи в една пеперудка. За горната пеперудка от етап 3 от фиг. 2.5 това е  $BW_3$ , което има разстояние четири точки. От програмата на пеперудките в другите етапи може да се направи заключението, че в общия случай

$$BWIDTH = 2^{S-1}, \quad (2.5)$$

където  $S$  е номера на етапа. Нека  $BSEP$ , разстоянието на пеперудката, да бъде разстоянието в паметта на подобните точки между най-близките пеперудки в етапа на тези пеперудки, които имат същия теглови множител. За етап 2 от фиг. 2.5,  $BSEP$  представлява  $BSEP$  за пеперудките с теглови множители  $W_s^0$ . На фигурата се вижда, че за  $S$ -тия етап

$$BSEP = 2^S. \quad (2.6)$$

Окончателно за  $N$ -точковото БПФ експонентите на тегловите множители се променят с величината

$$P = N / 2^S \quad (2.7)$$

за  $S$ -тия етап. Това може да бъде установено от фиг. 2.5. Например, за етап  $S=2$ ,  $P=8/2^2=2$  и тегловите множители са  $W_s^0$  и  $W_s^2$ .

Всяка пеперудка може да бъде пресметната по следния начин

$$XNEW(TOP) = XOLD(TOP) + W_N^R x XOLD(BOTTOM) \quad (2.8)$$

$$XNEW(BOTTOM) = XOLD(TOP) - W_N^R x XOLD(BOTTOM), \quad (2.9)$$

а разстоянието в паметта може да бъде запазено, ако го запишем като

$$TEMP = W_N^R x X(BOTTOM),$$

където  $X(BOTTOM)$  се отнася за изхода на пеперудката от предишния етап

$$X(BOTTOM) = X(TOP) - TEMP, \quad (2.10)$$

където  $X(BOTTOM)$  сега се отнася за изхода на необходимата пеперудка.

$X(TOP)$  се отнася за предишната стойност, и

$$X(TOP) = X(TOP) + TEMP, \quad (2.11)$$

където стойността на новата лява страна на  $X(TOP)$  е изходът на необходимата пеперудка. Ако цялата тази информация е налична, сега е възможно напишем псевдокода за БПФ, както е по-казано по-долу:

```

10 PI := 3.141593
20 DO FOR S=1 TO m
30   BSEP := 2^S
40   P := X / BSEP
50   BWIDTH := BSEP / 2
60   DO FOR J=0 TO (BSEP - 1)
70     R := P.J
80     THETA := 2xPIxR / N

```

evaluate for m stages

$(P = N / 2^S)$   
 $(BWIDTH = 2^{S-1})$

Work out weighting factors  
for a particular stage  
calculate power of  $W_s$   
calculate exponent of e

```

90   WN := CMPLX{cos(THETA), -sin(THETA)}
100  DO FOR TOPVAL = J STEP BSEP UNTIL N / 2
110    BOTVAL := TOPVAL + BSEP
120    TEMP := X(TOPVAL)xWN
130    X(BOTVAL) := TOPVAL - TEMP
140    X(TOPVAL) := X(TOPVAL) + TEMP
150  END GO
160 END GO
170 END GO

```

Lines 100-150 work out all butterflies in a stage which have the same weighting factors.

### 2.5.3. Изчислителни предимства на БПФ

Изчислителните предимства на БПФ могат да бъдат илюстрирани като се разгледа първо алгоритъмът за БПФ от фиг. 2.5. От нея следва, че  $N$ -точковото БПФ съдържа  $N/2$  пеперудки на всеки етап и  $\log_2 N$  етапа, което прави общо  $(N/2)\log_2 N$  пеперудки. От фиг. 2.4а се вижда, че всяка пеперудка включва едно комплексно умножение от вида  $W_N^K X_i(k)$ . Следователно БПФ съдържа  $(N/2)\log_2 N$  комплексни умножения, докато за сравнение ДПФ съдържа  $N^2$  такива умножения, както беше показано в т.2.4. Броят на икономисаните комплексни умножения е  $N^2 - (N/2)\log_2 N$ . Всяка пеперудка съдържа две комплексни събирания. БПФ изисква  $N\log_2 N$  комплексни събирания, докато за сравнение ДПФ се нуждае от  $N(N-1)$  такива събирания. Тогава спестените комплексни събирания са  $N(N-1) - N\log_2 N$ . В таблица 2-3 е направено сравнение за различни дължини на редицата  $N$ . За типичния случай на  $N=1024$ , използването на алгоритъма за БПФ намалява два пъти времето за изчисления в сравнение с ДПФ.

Таблица 2-3. Икономисване на комплексни умножения и събирания, когато се използва БПФ вместо ДПФ

N	ДПФ		БПФ		Отношение на умноженията при ДПФ към умноженията при БПФ	Отношение на събиранията при ДПФ към събиранията при БПФ
	Брой на комплексни умножения	Брой на комплексни събирания	Брой на комплексни умножения	Брой на комплексни събирания		
2	4	2	1	2	4	1
4	16	12	4	8	4	1,5
8	64	56	12	24	5,3	2,3
16	256	240	32	64	8,0	3,75
32	1024	992	80	160	12,8	6,2
64	4096	4032	192	384	21,3	10,5
128	16384	16256	448	896	36,6	18,1
256	65536	65280	1024	2048	64,0	31,9
512	262144	261632	2304	4608	113,8	56,8
1024	1048576	1047552	5120	10240	204,8	102,3
2048	4194304	4192256	11264	22528	372,4	186,1
4096	16777216	16773120	24576	49152	682,7	341,3
8192	67108864	67100672	53248	106496	1260,3	630,0

## 2.6. Обратно бързо преобразуване на Фурье

Алгоритът на БПФ за намиране на обратното бързо преобразуване на Фурье (ОБПФ) се получава веднага от алгоритъма за БПФ. Той се използва за преобразуване на спектъра в съответните сигнали и по този начин да провери дали БПФ е пресметнато коректно чрез използване основно на същия алгоритъм, с цел да се получат първоначалните данни. За да разберем как се получава ОБПФ нека направим следните замествания във формулата (2.20). Сумирането да се извърши по променливата  $\lambda$  вместо  $p$ , променливата  $k$  да се замести с  $\mu$ , да се замести  $\Omega = 2\pi NT$ , така че експонентата да стане  $-jk(2\pi N)/\lambda$ . Отново използваме означението  $x(\lambda T) = x(\lambda)$ . Формула (2.20) ще има вида

$$X(\mu) = \sum_{\lambda=0}^{N-1} x(\lambda) e^{-j\mu(2\pi/N)\lambda}, \quad \mu = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.23)$$

Сега да направим подобни замествания във формула (2.23), т.е.  $k = \mu$ , при което тази формула ще придобие вида

$$x(\mu) = \frac{1}{N} \sum_{\lambda=0}^{N-1} X(\lambda) e^{j\mu(2\pi/N)\lambda}, \quad \mu = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.24)$$

В последните две уравнения  $X(\lambda)$ ,  $X(\mu)$ ,  $x(\lambda)$  и  $x(\mu)$  са всички елементи на масивите  $X$  и  $x$ , които имат еднаква размерност и поради това може да изглежда, че ОБПФ,  $x(\mu)$ , се различават от БПФ,  $X(\mu)$ , само по множител  $\frac{1}{N}$  и знака на експонентата. Поради това с малко видоизменение БПФ може да бъде използвано за пресмятане на ОБПФ. Двете преобразувания могат да бъдат включени в същия алгоритъм, като направим следните видоизменки в предишния псевдокод.

```

line 5   K := 1 FOR FFT, K := -1 FOR IFFT
line 80  THETA := Kx2xPIxR / N
line 145 IF K = -1 DO
line 146  X(BOTVAL) := X(BOTVAL) / N
line 147  X(TOPVAL) := X(TOPVAL) / N
line 148 END DO

```

## 2.7. Реализиране на БПФ

Ясно е, че по принцип БПФ или ОБПФ се пресмятат чрез обработка на масива на данните с алгоритмите за БПФ или ОБПФ (включително алгоритмите за двоичен обратен код). Обаче, остават някои други съображения. Досега влиянието на прекъсването на функцията (сигнала), което се появява в дясната края на редицата от данни беше пренебрегвано, заедно с явлението, известно като при покриване. За да се извърши добра апроксимация на спектъра на данни, е необходимо да се вземат предвид тези ефекти. Това е направено в тази книга, тъй като надхвърля поставените цели. Друга важна забележка е, че досега се разглеждаше единствено алгоритъм с децимация във времето при основа 2, но съществуват други алгоритми, като например децимация по честота (ДПЧ).

### 2.7.1. Алгоритъм за БПФ с децимация по честота

В т.2.5 беше описан алгоритъм за БПФ с децимация във времето, ко-

е получен чрез повтарящо се деление на първоначалното ДПФ във вида (2.43) на две преобразувания, едното съдържащо четните членове и другото – нечетните членове, докато първоначалното преобразуване се редуцира на двуточкови преобразувания на първоначалните данни. Алтернативна възможност е да се раздели първоначалното преобразуване на две преобразувания, едното съдържащо първата половина данни и другото – втората половина на данните. Полученият алгоритъм, наречен алгоритъм с децимация по честотата е известен още като алгоритъм на Санде-Тъки.

## 2.7.2. Сравнение между алгоритмите с ДВВ и ДПЧ

При алгоритмите с ДПЧ наридането на входните данни е непроменено, но редицата на изхода след извършване на БПФ е в обратен двоичен код. И двета алгоритъма, с ДПЧ и с ДВВ са алгоритми със заместване. Възможно е да се създаде алгоритъм, при който и входната и изходната редици запазват нормалния ред на подреждане на данните, но той няма да бъде вече алгоритъм със заместване и освен това ще бъде необходима по-голяма памет. Броят на комплексните умножения е една и също за двета алгоритъма. В заключение, няма съществени разлики между двета алгоритъма.

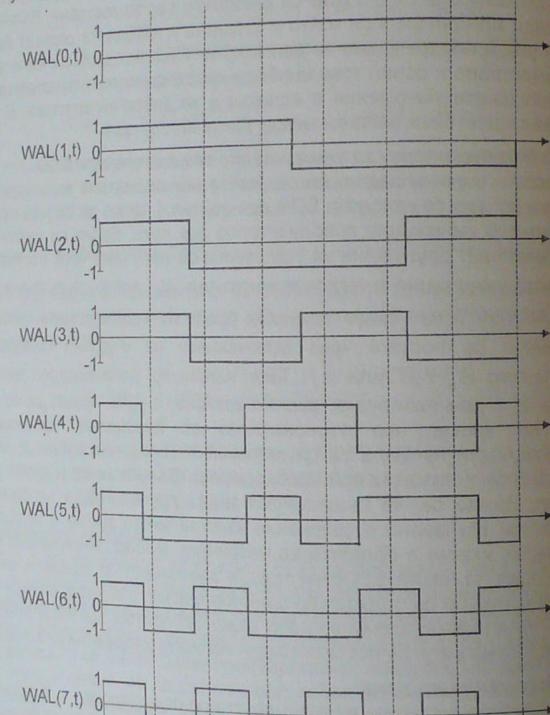
## 2.7.3. Възможности за увеличаване скоростта при БПФ

Възможно е увеличаване на скоростта на пресмятане за алгоритъма с ДВВ. Например, ако се използва БПФ при основа 4, може да се намали броят на комплексните умножения приблизително два пъти. Броят на събиранятия също се намалява. Друг начин за ускоряване се получава чрез отстраняване на излишните умножения с тегловия множител  $W_n$ , който се появява, когато  $W_n = \pm 1$  или  $\pm j$ . Това също намалява броят на необходимите събирания. Реализирането се постига чрез включването на отделна пеперудка за случаите, когато  $W_n = \pm 1$  или  $\pm j$ . Така, например, нека е даден алгоритъм при основа 2, с две пеперудки, със заместване, с ДВВ. Може да се получи икономия на време, ако първоначално се пресметнат синусовите и косинусовите части на  $W_n$  и те се запомнят в справочна таблица, от която стойностите ѝ се получават при необходимост. Възможни са и други усъвършенствания. Вижда се, че съществуват много други БПФ, а не само едно. Подробното им изучаване и сравнение изисква много време и задълбочени математически знания в областта на матричния анализ, многомерни изображения и теория на числата. Освен това, в зависимост от сферата на приложение в едни случаи са подходящи едни алгоритми, а в други случаи – други алгоритми. Има голямо значение дали даден алгоритъм ще бъде реализиран само като програма или се поставя за цел неговата хардуерна реализация.

## 2.8. Преобразуване на Уолш

Преобразуването, разглеждано досега се основаваше на функциите синус и косинус. Преобразуванията, които се основават на правоъгълни сигнали, имат стойности само  $\pm 1$  и са много по-прости и по-бързи за пресмятане. Те са много по-подходящи за представяне на сигнали, които съдържат точки на прекъсване, какъвто е случаят с обработката на изображения. Същевременно те не са подходящи за описание на непрекъснати сигнали и може би не са фазово инвариантни в описани случаи, когато полученият спектър може да бъде изкривен. Обаче такива сигнали се използват при обработката на изображения.

жения (астрономия и спектроскопия), кодиране на сигнали, и филтрация. Също както ДПФ се основава на множеството на хармонично свързани синусови и косинусови сигнали, така и дискретното преобразуване на Уолш (ДПУ) се основава на множеството на хармонично свързани правоъгълни сигнали, известни като функции на Уолш. Обаче, понятието честота не е дефинирано за правоъгълни сигнали и поради това се налага да се въведе аналогично понятие, наречено "честост". Честостта се нарича половината от средния брой пресичания на нулевото ниво за единица време. На фиг. 2.6 са показани множеството функции на Уолш за  $N=8$ , наредени по нарастваща честост. Те образуват редицата на Уолш или се казва, че са наредени по Уолш. Функцията на Уолш в момента  $t$  и с честост  $n$  се означава с  $WAL(n,t)$ .



Фиг. 2.6. Функциите на Уолш, наредени по Уолш за  $n=0,1,\dots,n$

От фиг. 2.6 се вижда, че съществува еднакъв брой четни и нечетни функции на Уолш, точно както е случаят на косинусови и синусови компоненти в реда на Фурье. Четните функции  $WAL(2k,t)$  се означават като  $CAL(k,t)$ , а

нечетните функции  $WAL(2k+1,t)$  се означават като  $SAL(k,t)$ , където  $k=1,2,\dots,N/2-1$ .

Всеки сигнал  $f(t)$  може да бъде представен с ред на Уолш, по аналогичен начин, както с ред на Фурье.

$$f(t) = a_0 WAL(0,t) + \sum_{i=1}^{N/2-1} \sum_{j=0}^{N/2-1} [a_i SAL(i,t) + b_j CAL(j,t)] \quad (2.66)$$

където  $a_i$  и  $b_j$  са кофициентите на реда.

За всеки две функции на Уолш са изпълнени равенствата

$$\sum_{t=0}^{N-1} WAL(m,t) WAL(n,t) = \begin{cases} N & \text{за } m=n \\ 0 & \text{за } m \neq n, \end{cases}$$

т.е. функциите на Уолш са ортогонални.

Правото и обратно дискретно преобразуване на Уолш се дефинира със следните формули

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i WAL(k,i), \quad k = 0,1,\dots,N-1 \quad (2.67)$$

и

$$x_i = \sum_{k=0}^{N-1} X_k WAL(k,i), \quad k = 0,1,\dots,N-1, \quad (2.68)$$

откъдето се вижда, че с изключение на множителя  $\frac{1}{N}$ , обратното преобразуване е същото както правото, и че  $WAL(k,i) = \pm 1$ . Поради това двойката на преобразуването може да бъде пресметната чрез умножение на матрици, извършено с компютър. Обаче липсата на фазова инвариантност означава, че ДПУ не е подходящо за бърза корелация или конволюция.

От уравнение (2.69) се вижда, че  $k$ -тата компонента на ДПУ се получава чрез умножения на всеки отчет на сигнала  $x_i$  с функцията на Уолш с честота  $k$  и сумиране за  $k = 0,1,\dots,N-1$ . Това може да бъде изразено за всяко  $k$  на компонентите на ДПУ в матричен вид по следния начин

$$X_k = x_i W_{ki}, \quad (2.69)$$

където  $x_i = [x_0 x_1 x_2 \dots x_{N-1}]$  е редицата на входните данни,

$$W_{ki} = \begin{bmatrix} W_{0,1} & W_{0,2} & \dots & W_{0,N-1} \\ W_{1,1} & & & \\ \vdots & & & \\ W_{N-1,1} & W_{N-1,2} & \dots & W_{N-1,N-1} \end{bmatrix}$$

е матрицата на преобразуването на Уолш и  $X_k = [X_0 X_1 \dots X_{N-1}]$  е векторът на ДПУ с размерност  $N-1$ . Ще отбележим, че  $W_{ki}$  е матрица от ред  $N \times N$ , където  $N$  е броят на членовете на входната редица, т.е. това е броят на точките, в които е дискретизиран входният сигнал. Тогава, ако входната редица е  $N$ -точкова, необходимо е да се вземат първите  $N$  функции, наредени по Уолш. Всяка една от тях е дискретизирана  $N$  пъти.  $k$ -тият ред на матрицата  $W_{ki}$  съответства на  $N$ -те дискретни стойности на  $k$ -тата компонента на честостта.

**Пример 2.6.** Да намерим ДПУ на редицата  $(1, 2, 0, 3)$ . Тя има  $N=4$  поради това  $W_{kl}$  е матрица от вида  $4 \times 4$ , получена от първите четири на фиг. 2.6.

$$W_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Тогава от (2.69) можем да запишем

$$X_k = \frac{1}{4} [1 \ 2 \ 0 \ 3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} [6 \ 0 \ 2 \ -4],$$

откъдето отчитаме  $X_0 = 1,5$ ,  $X_1 = 0$ ,  $X_2 = 0,5$  и  $X_3 = -1$ . Този резултат е много по-лесен за получаване, отколкото съответното ДПФ.

Съответният спектър може да бъде пресметнат, ако се знаят компонентите на мощността

$$P(k) = [|CAL(k, t)|^2 + |SAL(k, t)|^2]^{1/2},$$

където

$$P(0) = X_0^2(0),$$

$$P(k) = X_c^2(k, t) + X_s^2(k, t),$$

$$P\left(\frac{N}{2}\right) = X_s^2\left(\frac{N}{2}, t\right)$$

и  $k=1, 2, \dots, N/2-1$ . За фазовите компоненти можем да запишем

$$\varphi(0) = 0, \pi,$$

$$\varphi(k) = \arctg \left[ \frac{X_{s(k)}}{X_{c(k)}} \right], \quad k = 1, 2, \dots, N/2-1$$

и

$$\varphi\left(\frac{N}{2}\right) = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

За ДПУ можем да запишем

$$P(0) = 1,5^2 = 2,25; \quad \varphi(0) = 0, \pi,$$

$$P(1) = 0^2 + 0,5^2 = 0,25; \quad \varphi(1) = \arctg\left(\frac{0}{0,5}\right) = 0,$$

$$P(2) = (-1)^2 = 1; \quad \varphi(2) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2.$$

## 2.9. Преобразуване на Адамар

Преобразуването на Адамар, или преобразуване на Уолш-Адамар, е основата си същото, както преобразуването на Уолш, но са използвани функциите на Уолш и поради това редовете на матрицата на преобразуването подреждат по друг начин.

Получената матрица на Адамар се състои от матрици от втори ред. Фиг. 2.7 е дадена матрицата на Адамар от ред  $8 \times 8$ , която се означава с  $H$ . Тя може да бъде разглеждана като съставена от матриците

$${}^2H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad {}^{-2}H = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Всяка матрица на Адамар от ред  $2N$  може да бъде получена рекурсивно от  ${}^2H$  по следния начин

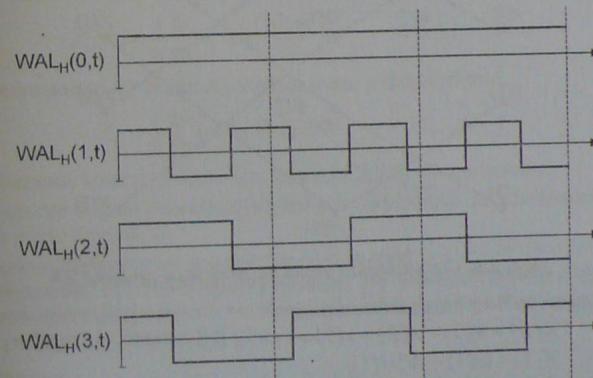
$${}^{2N}H = \begin{bmatrix} {}^N H & {}^N H \\ {}^N H & -{}^N H \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

	$i \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\downarrow 0$		1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
2		1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
3		1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
4		1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
5		1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
6		1	1	-1	-1	-1	1	1	1
7		1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

Фиг. 2.7. Матрица на преобразуването на Адамар от ред  $8 \times 8$

Значението на това рекурсивно свойство е, че нареждането на функциите на Уолш по Адамар, в резултат на което се получава преобразуването на Уолш-Адамар, може да бъде по-бързо изчислено, отколкото ДПУ. Функциите на Уолш наредени по Адамар (или естествено наредени) са дадени на фиг. 2.8. Редицата, наредена по Адамар се получава от редицата, наредена по Уолш по следния начин:

1. редът на функциите, наредени по Уолш, се записва в двоичен код,
2. извършва се двоично реверсиране на двоичните числа,
3. двоичните числа се превръщат в код на Грей,
4. преобразуване на тези стойности в десетичен код.



Фиг. 2.8. Функциите на Уолш, наредени по Адамар за  $n=0, 1, 2, 3$

**Пример 2.7.** Да се намери дискретното преобразуване на Адамар редицата  $(1, 2, 0, 3)$ . Матрицата на Адамар  $H_{ki}$  от ред  $4 \times 4$  има висока

$$H_{ki} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Тя е съставена като е използвано свойството на матрицата на Адамар. ДПУА на редицата  $(1, 2, 0, 3)$  се определя по следния начин

$$X_{ki}^{WH} = \frac{1}{4} [1 \ 2 \ 0 \ 3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} [6 \ -4 \ 0 \ 2],$$

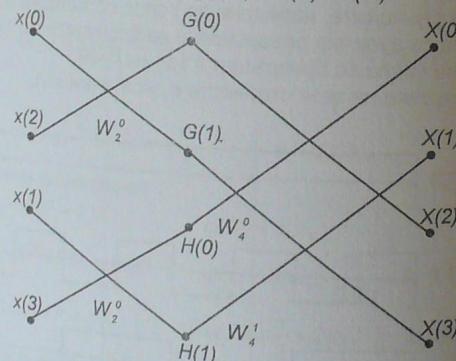
откъдето  $X_0^{WH} = 1,5$ ,  $X_1^{WH} = -1$ ,  $X_2^{WH} = 0$ ,  $X_3^{WH} = 0,5$ .

Стойностите на компонентите на преобразуването на Уолш-Адамар същите, както тези на компонентите на Уолш, но са подредени по друг начин.

**Пример 2.8.** Първите четири дискретни отчета на напрежението сигнал с широчина  $10\text{Hz}$ , дискретизиран с честота  $125\text{Hz}$  са  $(0,5; 1,0; 0,5; 1,0)$ . Покажете как може да бъде получено ДПФ на тази редица като използвате БПФ и след това немерете преобразуването на Фурье на същата редица.

**Решение.** На фиг. 2.9 е показан сигналният ориентиран граф на БПФ имаме

$$\begin{aligned} X(0) &= G(0) + W_4^0 H(0) = G(0) + H(0), \\ G(0) &= x(0) + W_2^0 x(2) = x(0) + x(2), \\ H(0) &= x(1) + W_2^0 x(3) = x(1) + x(3). \end{aligned}$$



Фиг. 2.9. Сignalният граф за БПФ към пример 2.8

Тъй като  $W^0 = 1$  можем да запишем

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) + x(2) + x(1) + x(3) = 0,5 + 1 + 1 + 0,5 = 3, \\ X(1) &= G(1) + W_4^1 H(1), \\ G(1) &= x(0) - W_2^0 x(2) = x(0) - x(2), \\ H(1) &= x(1) - W_2^0 x(3) = x(1) - x(3). \end{aligned}$$

Сега  $W_N = e^{-j2\pi/N}$ , и следователно  $W_N^1 = e^{-j2\pi/4} = e^{-j\pi/2}$ . След заместване се получава

$$\begin{aligned} X(1) &= x(0) - x(2) + e^{-j\pi/2}[x(1) - x(3)] = \\ &= 0,5 - 1 + \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] (1 - 0,5) = \\ &= 0,5 - 1 + (0 - j)0,5 = 0,5 - j0,5 = -0,5(1 + j), \\ X(2) &= G(0) - W_4^0 H(0) = G(0) - H(0) = \\ &= x(0) + x(2) - [x(1) + x(3)] = 0,5 + 1 - (1 + 0,5) = 0, \\ X(3) &= G(1) - W_4^1 H(1) = x(0) - x(2) - e^{-j\pi/2}[x(1) - x(3)] = \\ &= 0,5 - 1 - \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] (1 - 0,5) = \\ &= 0,5 - (-j)0,5 = -0,5 + j0,5 = 0,5(-1 + j). \end{aligned}$$

Следователно

$$X(\Omega) = \{3; -0,5(1 + j); 0; 0,5(-1 + j)\}.$$

Когато интервалът на дискретизиран  $T$  е малък

$$\text{ПФ} = T \cdot \text{ДПФ},$$

където ПФ е преобразуването на Фурье. Тук  $T = 1/125s = 0,008s$ .Периодът на сигнала е  $1/10s = 0,1s$ . Следователно

$$\frac{T}{\text{периода}} = \frac{0,008}{0,1} = 0,08 \ll 1$$

и би било добра апроксимация да се приеме, че ПФ = Т.ДПФ, откъдето

$$\text{ПФ} = \{0,024; -0,004(1 + j); 0; 0,004(-1 + j)\}.$$

**Пример 2.9.** В система на компресия на данни, данните първоначално се преобразуват и след това трансформираните стойности се ограничават до амплитуда 0,375. Ще бъдат използвани два вида преобразуване – дискретно косинус преобразуване  $X_c(k)$ , дефинирано с формулата

$$X_c(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{k2\pi n}{N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

и преобразуването на Уолш  $X_k$ , дефинирано с формулата

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i WAL(k, i), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Редицата, която се преобразува е  $\{1, 2, 0, 3\}$ . Определете

1. кое от двете преобразувания е по-ефикасно за компресия на данни в този случай, и

2. какъв процент на компресия се постига.

Извършете обратно преобразуване на компресиралите данни като използвате преобразуването на Уолш и сравнете резултатите с първоначалната редица от данни.

**Решение.**

1. За ДКП, когато  $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 3$ , се получава

$$\begin{aligned}
X_c(0) &= \frac{1}{4}x_0 \cos 0 + x_1 \cos 0 + x_2 \cos 0 + x_3 \cos 0 = \\
&= \frac{1}{4}(1+2+0+3)=1,5, \\
X_c(1) &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x_n \cos\left(\frac{2\pi n}{4}\right) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x_n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{4} \left[ x_0 + x_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + x_2 \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + x_3 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] = \\
&= \frac{1}{4} [1+2.0+0.(-1)+3.0]=0,25, \\
X_c(2) &= \frac{1}{4} \left[ x_0 \cos\left(\frac{4\pi \cdot 0}{4}\right) + x_1 \cos\left(\frac{4\pi \cdot 1}{4}\right) + x_2 \cos\left(\frac{4\pi \cdot 2}{4}\right) + x_3 \cos\left(\frac{4\pi \cdot 3}{4}\right) \right] = \\
&= \frac{1}{4} (x_0 - x_1 + x_2 - x_3) = \frac{1}{4} (1 - 2 + 0 - 3) = -1, \\
X_c(3) &= \frac{1}{4} \left[ x_0 \cos\left(\frac{6\pi \cdot 0}{4}\right) + x_1 \cos\left(\frac{6\pi \cdot 1}{4}\right) + x_2 \cos\left(\frac{6\pi \cdot 2}{4}\right) + x_3 \cos\left(\frac{6\pi \cdot 3}{4}\right) \right] = \\
&= \frac{1}{4} [1-2.0+0.(-1)+3.0]=0,25.
\end{aligned}$$

Окончателно се получава

$$ДКП=(1,5; 0,25; -1; 0,25).$$

Стойностите, които остават след ограничението, (стойностите  $|>0,375$ ) са 1,5 и -1.

За преобразуването на Уолш, пресметнато в т.2.8.2, получихме  $X_k=\{1,5; 0; 0,25; -1\}$ , така че стойностите, които остават след отсечението в този случай са 1,5, 0,5 и -1.

Следователно ДКП гарантира по-ефикасна компресия на данните при разглеждания случай.

2. Нека приемем, че ефикасността на компресията на данни  $\eta$  се определя с формулата

$$\eta = \frac{(\text{брой на данните на първ. редица} - \text{брой на данните на преобр. редица}) \cdot 100}{\text{брой на данните на първ. редица}}$$

Получаваме

$$\eta = \frac{4-2}{4} \cdot 100\% = 50\%.$$

Окончателно за редицата на компресираниите данни чрез преобразуването на Уолш е  $\{1,5; 0; 0,5; -1\}$ . Обратното преобразуване се извършва по формула (2.68):

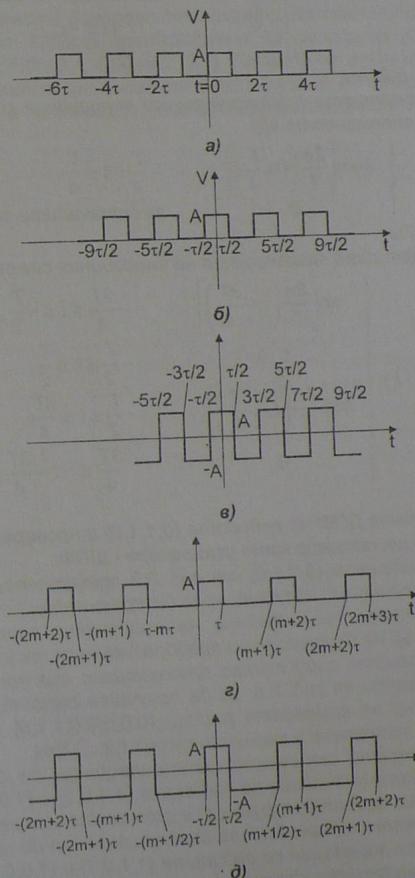
$$x_i = \sum_{k=0}^{N-1} X_k WAL(k, i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$X_k = [1,5 \quad 0 \quad 0,5 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [1 \quad 2 \quad 0 \quad 3].$$

Току-що получената редица е еднаква с първоначалната редица. Това е така, защото  $X_1=0<0,375$  и въпреки, че тази стойност не се предава, тя участва в обратното преобразуване като 0, нейната точна стойност. Обикновено възстановената редица е априксимация на първоначалната редица.

### ЗАДАЧИ

- 2.1. Намерете реда на Фурье за периодичните сигнали, показана на фиг. 2.10.
- 2.2. Намерете реда на Фурье в комплексен вид за сигналите от фиг. 2.10.



Фиг. 2.10. Периодичните сигнали към задача 2.1

- 2.3. Покажете, че амплитудите, намерени в зад. 2.1 са единакви, като са намерени в зад. 2.2.
- 2.4. Начертайте амплитудния и фазовия спектър на Фуршеровите компоненти за сигналите от фиг. 2.10.
- 2.5. Пресметнете плътността на амплитудния и енергийния спектър на напрежението  $v(t)$

$$v(t) = \begin{cases} \frac{A}{\tau} + A & -\tau \leq t \leq 0, \\ -\frac{A}{\tau} + A & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0 & \tau \leq t \leq -\tau, \end{cases}$$

където  $A=5V$  и  $\tau=20ms$ .

- 2.6. Пресметнете плътността на енергийния и фазовия спектър на напрежението  $v(t)$

$$v(t) = \begin{cases} 2 \sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{T}{4}\right)\right] & -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4}, \\ 0 & \text{за останалите случаи,} \end{cases}$$

където  $T=0,0167s$ .

- 2.7. Начертайте плътността на енергийния спектър на функцията

$$\omega(t) = \begin{cases} \sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{3T}{4}\right)\right] & -\frac{3T}{4} \leq t \leq -\frac{T}{2}, \\ 1, 0 & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ \sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{3T}{4}\right)\right] & \frac{T}{2} \leq t \leq \frac{3T}{4}, \\ 0 & \frac{3T}{4} \leq t \leq -\frac{3T}{4}, \end{cases}$$

където  $T=4s$ .

- 2.8. Намерете ДПФ на редицата  $\{0,1,1,0\}$  и проверете валидността на вашия отговор като извършите ОДПФ.

- 2.9. Ако редицата  $\{0,1,1,0\}$  от зад. 2.8 предствалява отчетите на напрежението, получени чрез дискретизиране с честота  $125Hz$ , определете плътността на енергийния спектър и фазовия спектър на Фуршеровото преобразуване за тази редица.

- 2.10. Използвайтe свойството преместване във времето за ДПФ, решението на зад. 2.8, за да получите амплитудния и фазовия спектър на времевата редица  $\{0,0,0,0,1,1,0\}$  за дискретни данни, отчетени в моментите  $t=0,1,2,\dots,7ms$ .

- 2.11. Използвайтe теоремата за корелацията, за да пресметнете кръговата корелация на редиците  $\{1,1,0,1\}$  и  $\{1,0,0,1\}$ . Начертайте корелационната функция в зависимост от закъснението  $\tau$ .

- 2.12. Приложете теоремата за корелацията, за да пресметнете кръговата корелация на редиците  $\{1,1,0,1\}$  и  $\{1,0,0,1\}$ . Начертайте корелационната функция в зависимост от закъснението  $\tau$ . Сравнете резултата с решението на зад. 2.11, като обяснете разликите.

- 2.13. Пресметнете ДПФ на редицата  $\{0,1,1,0\}$  като използвате алгоритма за БПФ на Коли-Тъки с двайчица във времето. Проверете отговора, като го сравнете с този от зад 2.8. Сравнете боя на комплексните сумиране и умножение за двета метода.
- 2.14. Пресметнете ОБПФ на отговора на зад. 2.13, за да проверите, че се получава редицата  $\{0,1,1,0\}$ .
- 2.15. Пресметнете БПФ на редицата  $\{0,0,1,1,1,1,0,0\}$  и начертайте амплитудния и фазовия спектър. Проверете отговора като пресметнете ОБПФ, за да получите първоначалната редица.
- 2.16. Пресметнете дискретното косинус, дискретното Уолш и дискретното Адамар преобразуване на редицата  $\{0,1,-0,2;0,3,-0,4;0,5,1,5;2,1,5; -0,4; 0,3; -0,2; 0,1\}$ . Подредете тези преобразувания в зависимост от тяхната ефективност по отношение на компресията на данните, ако праговата стойност на ограничение е 0,35.

## ГЛАВА 3

### КОРЕЛАЦИЯ И КОНВОЛЮЦИЯ

#### 3.1. Въведение

Често пъти е необходимо да се даде количествена оценка за това каква степен е взаимната връзка на един процес с друг или да се установи доколко една съвкупност от данни е подобна на друга. Казано с други думи, да се намери корелацията между процесите или данните. Корелацията може да бъде дефинирана математически и може да бъде измерена количествено. Процесът на корелиране заема значително място при обработката на сигнали. Корелацията намира приложение при обработката на изображения за машинно зрение или дистанционно сondиране чрез спътник, при което се събират данни от различни изображения, радиолокационни и хидроакустични системи за определяне на разстояние и разположение, при които излъчени и отразените сигнали се сравняват, за детектиране и идентификация на замени сигнали, за управление при наблюдение влиянието на входните сигнали върху изходните, за идентификация на двоични кодови думи при системите импулсно-кодова модулация, където се използват корелационни детектори като съществена част от обикновените методи за оценка по метода на наималките квадрати, при изчисляване на средната мощност на сигналите и много други области, такива като, например, климатология. Корелацията е съществената част от процеса на конволюцията. Процесът на конволюцията е по същество корелацията на две редици от данни, при който едната от редиците е била обръната. Това означава, че същите алгоритми могат да бъдат използвани за пресмятане на корелациите и конволюциите, като просто се обръне една от редиците. Процесът на конволюция произвежда изходен сигнал на система, която филтрира входния сигнал. Спектърът на получения сигнал се състои от конволюцията на спектъра на сигнала със спектъра на неприведената функция на прозореца.

#### 3.2. Корелация

Да разгледаме следната задача. Дадени са две редици от данни, получени чрез дискретизиране на два сигнала с една и съща честота на дискретизиране, т.е. отчетите са взети в едни и същи моменти. Как могат да бъдат сравнени двата сигнала? Ако двата сигнала се променят по еднакъв начин – точка по точка, тогава измерването на тяхната корелация може да се извърши като се вземе сумата от произведението на съответните двойки точки. Този подход е особено подходящ, когато се разглежда случая за две независими произволни редици от данни. В този случай сумата от произведените членове ще е пренебрежимо малко произволно число, когато броят на двойките нараства. Това е така, защото всички числа, положителни и отрицателни, са с еднаква вероятност на появяване, така че произведените от двойките числа взаимно се унищожават при събиране. Не е такъв случаят, когато сумата е от краен брой събираме. Тогава се забелязва някаква взаимна връзка или на математичен език – степен на корелация. Отрицателната сума ще бъде указание за отрицателна корелация, т.е. нарастването на една променлива е свързано с намаляването на друга променлива. Взаимната ко-

релация  $r_{12}(n)$  между две редици от данни  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ , всяка от които съдържа  $N$  данни се дефинира с формулата

$$r_{12} = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n).$$

Тази дефиниция, обаче, дава резултат, който зависи от броя на взетите отчети. Налага се този резултат да се коригира чрез нормализиране като се раздели на броя на точките  $N$ . Това може да бъде разглеждано като усредняване на сумата от произведенията. Така уточнената формула е

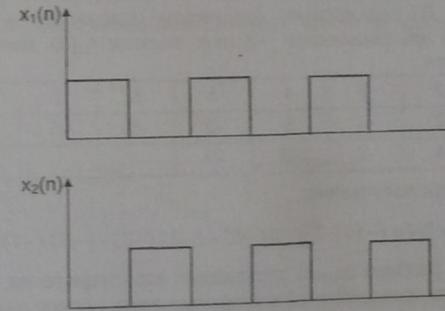
$$r_{12} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n).$$

**Пример 3.1.** В таблицата по-долу са дадени редиците от числа  $x_1$  и  $x_2$ , всяка от които има 9 числа. Да се пресметне корелацията  $r_{12}$ .

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_1$	4	2	-1	3	-2	-6	-5	4	5
$x_2$	-4	1	3	7	4	-2	-8	-2	1

$$r_{12} = \frac{1}{9} [4.(-4) + 2.1 + (-1).3 + 3.7 + (-2).4 + (-6).(-2) + (-5).(-8) + 4.(-2) + 5.1] = 5.$$

Обаче, за да бъде полезна тази дефиниция е необходимо да се видоизменят. В някои случаи може да се получи нулева корелация, въпреки че двата сигнала са 100% корелирани. Това може да се случи, например, когато двата сигнала са с противни фази, което е често срещан случай. Тази ситуация е показвана на фиг. 3.1.

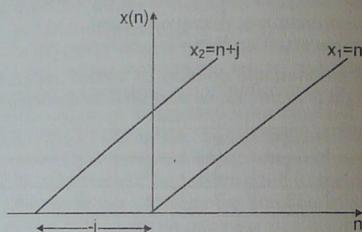


Фиг. 3.1. Несъвпадащи по фаза 100% корелирани сигнали с нулева корелация при нулево закъснение

От фиг. 3.1 се вижда, че произведенietо на всяка двойка точки в корелацията е нула и следователно корелацията е нула, тъй като или  $x_1$  или  $x_2$  винаги е нула. Обаче, очевидно е, че сигналите са силно корелирани, въпреки че са в противофаза. Фазовата разлика би могла, например, да се появи ако  $x_1$  е основният сигнал, подаден на входа на схемата, а  $x_2$  е закъсненият изходен сигнал. За да избегнем тези фазови разлики е необходимо да преместим

единия от сигналите спрямо другия. Обикновено  $x_2$  е отместен наляво пред да се извърши корелацията. Както се вижда от фиг. 3.2 това е равностойно на изменение на сигнала  $x_2$  в  $x_2(n+j)$ , където  $j$  е отместването наляво, т.е. броят на отчетите, с които  $x_2$  е преместен наляво. По подобен начин, ако се разсъждава, сигналът  $x_1$  е преместен надясно.

$$r_{12}(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n+j) = r_{12}(-j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)x_1(n-j). \quad (3.2)$$



Фиг. 3.2. Сигналът  $x_2=x_1+j$  преместен на  $j$  отчета наляво спрямо сигнала  $x_1$

На практика, когато двата сигнала се корелират, връзката между фазите им може би не е известна и поради това корелацията ще се пресмета за голем брой различни закъснения с цел да се установи най-голямата стойност на корелацията, която трябва да се взема като точна стойност.

**Пример 3.2.** Да разгледаме взаимната корелация на горните две редици  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  при закъснение  $j=3$ , т.е. търсим  $r_{12}(3)$ . Двете редици са дадени с таблицата

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_1$	4	2	-1	3	-2	-6	-5	4	5
$x_2$	7	4	-2	-8	-2	-1			

За корелацията получаваме

$$r_{12}(3) = \frac{1}{9} [4 \cdot 7 + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot (-8) + (-2) \cdot (-2) + (-6) \cdot (-1)] = 2,667.$$

Възможно е, разбира се, да разгледаме корелацията на непрекъснати във времето сигнали. В този случай в непрекъснатата област  $n \rightarrow j \rightarrow n+j$

$$r_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(\tau)x_2(\tau+\tau)d\tau. \quad (3.2)$$

Ако  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  са периодични сигнали с период  $T_0$ , формула (3.2) се опростява

$$r_{12}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{0-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)x_2(t+\tau)dt. \quad (3.3)$$

Ако сигналите имат крайна енергия, например непериодичните импулсни сигнали, тогава усредняването се извършва за време  $T$  като  $T \rightarrow \infty$  не може

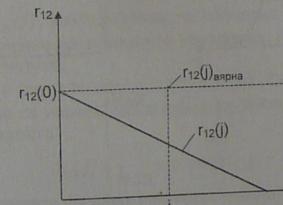
да бъде прието, защото  $1/T \rightarrow 0$  и  $r_{12}(\tau)$  е винаги пренебрежимо малко число. За този случай формула (3.3) ще се видоизмени така

$$r_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t+\tau)dt. \quad (3.4)$$

На практика, процесът противва в краен интервал от времето и тогава

$$r_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t)x_2(t+\tau)dt. \quad (3.5)$$

При извършване на взаимна корелация със сигнали с краяна дължина се среща друго затруднение. То може да бъде забелязано в горния пример, за който  $r_{12}(3) = 2,667$ . Ако сигналът  $x_2$  е преместен наляво, сигналите няма да се припокриват вече и отчетите в краищата на редицата на редиците няма да образуват произведения от двойки отчети. Това е известно като "ефект на края". В разглеждания пример броят на двойките липсва от девет до шест при закъснение три. Резултатът е линейно намаляване на  $r_{12}(j)$ , когато  $j$  нараства, което води до оспорвана стойност за  $r_{12}(j)$ . Едно възможно решение е да се направи една от редиците два пъти по-дълга от необходимата дължина на корелацията. Това би могло да се постигне чрез записване на повече данни, или, ако една от редиците се периодизира чрез повторение на редицата (като се гарантира необходимото състоявание на двата края). Друга възможност е да се извърши корекция на всички пресметнати стойности. На фиг. 3.3 е показано по какъв начин  $r_{12}(j)$  намалява, което е резултат от "ефекта на края", т.е. действителното изменение на  $r_{12}(j)$  не е включено. За  $j=0$ ,  $r_{12}(j)=r_{12}(0)$ , която стойност може да бъде изчислена. За  $j=N$ ,  $r_{12}(N)=0$ , тъй като сигналите вече не се припокриват. За междуини стойности на  $j$ , върната стойност на  $r_{12}(j)$  е  $r_{12}(j)_{\text{варн}}$ , докато действителната стойност, която се дължи на "ефекта на края" е  $r_{12}(j)$ .



Фиг. 3.3. Влияние на ефекта на края върху взаимната корелация  $r_{12}(j)$

Тогава от фигурата можем да запишем

$$\frac{r_{12}(j)_{\text{варн}} - r_{12}(j)}{j} = \frac{r_{12}(0)}{N},$$

откъдето

$$r_{12}(j)_{\text{варн}} = r_{12}(j) + \frac{j}{N} r_{12}(0). \quad (3.6)$$

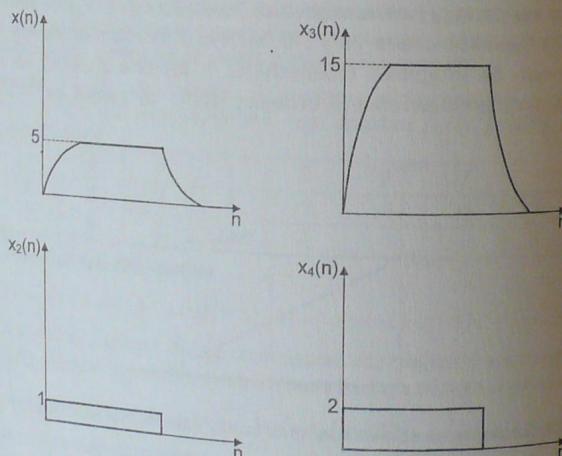
Следователно изчислените стойности на взаимната корелация трябва да се коригират поради съществуването на "ефекта на края" като се прибави величината  $j r_{12}(0)/N$  към стойността  $r_{12}(j)$ .

Стойностите на взаимната корелация, които се пресмятат по горната формула, зависят от абсолютните стойности на данните. Често пъти е необходимо да се измери взаимната корелация, но във фиксирания интервал от  $-1$  до  $+1$ . Това може да бъде направено като се нормализират стойностите чрез деление с величина, която зависи от енергията, съдържаща се в данните. Например, да разгледаме двете двойки сигнали  $x_1(n), x_2(n)$  и  $x_3(n), x_4(n)$ .

Стойностите на отчетите са дадени в таблицата:

$n$	0.	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_1(n)$	0	3	5	5	5	2	0,5	0,25	0
$x_2(n)$	1	1	1	1	1	0	0	0	1
$x_3(n)$	0	9	15	15	15	6	1,5	0,75	0
$x_4(n)$	2	2	2	2	2	0	0	0	2

Сигналите  $x_1(n)$  и  $x_3(n)$ , както се вижда от фиг. 3.4, са подобни. Различават се само по големина. Същото важи и за двойката  $x_2(n)$  и  $x_4(n)$ . Корелацията между  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  е следователно същата, както между  $x_3(n)$  и  $x_4(n)$ . Обаче, взаимните корелации  $r_{12}(1)$  и  $r_{34}(1)$  са съответно 1,47 и 8,83.



Фиг. 3.4. Двойките сигнали  $\{x_1(n), x_2(n)\}$ ,  $\{x_3(n), x_4(n)\}$ , които имат различни амплитуди, но единакви взаимни корелации

Те се различават, защото зависят от абсолютните стойности на данните. Това положение може да бъде поправено чрез нормализиране на взаимната корелация  $r_{12}(j)$  с делителя

$$\left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1^2(n) \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_2^2(n) \right]^{1/2} = \frac{1}{N} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x_1^2(n) \sum_{n=0}^{N-1} x_2^2(n) \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

и по същия начин за  $r_{34}(j)$ . Нормализирианият израз за  $r_{12}(j)$  е

$$p_{12}(j) = \frac{r_{12}(j)}{\frac{1}{N} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x_1^2(n) \sum_{n=0}^{N-1} x_2^2(n) \right]^{1/2}}. \quad (3.8)$$

Величината  $p_{12}(j)$  се нарича коефициент на взаимната корелация. Неговата стойност винаги се намира между  $-1$  и  $+1$ . Тук  $+1$  означава 100% корелация в същия смисъл, а  $-1$  означава корелация в противоположен смисъл. Пример за това са сигналите, които се намират в противофаза. Стойност  $0$  означава нулема корелация. Това означава, че сигналите са напълно независими. Например, такъв е случаят, ако единият от сигналите е случаен. Малки стойности на  $p_{12}(j)$  са указание за много ниска корелация. Нормализиращият делител за  $r_{12}(j)$  в горния пример е

$$\frac{1}{N} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x_1^2(n) \sum_{n=0}^{N-1} x_2^2(n) \right]^{1/2} = \frac{1}{9} (88,31 \cdot 6)^{1/2} = 2,56$$

и за  $r_{34}(j)$  -

$$\frac{1}{N} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x_3^2(n) \sum_{n=0}^{N-1} x_4^2(n) \right]^{1/2} = \frac{1}{9} (794,824)^{1/2} = 15,34,$$

откъдето

$$p_{12}(1) = \frac{r_{12}(1)}{2,56} = \frac{1,47}{2,56} = 0,57,$$

и

$$p_{34}(1) = \frac{r_{34}(1)}{15,34} = \frac{8,83}{15,34} = 0,57.$$

Сега  $p_{12}(1) = p_{34}(1)$ , което показва, че процесът на нормализиране дава възможност за сравнение на взаимните корелации, независимо от абсолютните стойности на отчетите.

По-специален е случаят, когато  $x_1(n) = x_2(n)$ . Сигналът се корелира със себе си. Този процес се нарича автокорелация. Автокорелацията на сигнала се дефинира с формулата

$$r_{11}(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_1(n+j).$$

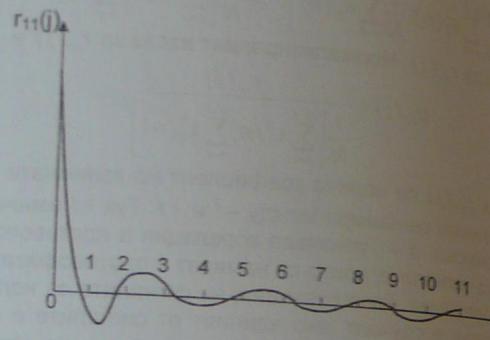
Автокорелационната функция има едно твърде полезно свойство

$$r_{11}(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1^2(n) = S,$$

където  $S$  е нормализираната енергия на сигнала. Това дава възможност за създаване на метод за пресмятане на енергията на сигнала. Ако сигналът е слушен, например, бял шум или гаусов шум в електрическа система, тогава автокорелацията ще има максимална стойност при нулево закъснение, а за по-големи закъснения тя осцилира по случаен закон около абсцисната ос с по-малки амплитуди – фиг. 3.5.

Валидно е неравенството

$$r_{11}(0) = r_{11}(j).$$



Фиг. 3.5. Автокорелационна функция на случаен сигнал

### 3.2.1. Взаимна корелация и автокорелация

По-голямо внимание е необходимо, когато се извършва взаимна корелация на две периодични редици с различна дължина. Резултатът ще е число, което ще се повтаря периодично с период, равен на периода на обе редици. Този резултат няма да представя пълния период на по-дългата редица и следователно е некоректен. Това може да бъде показано чрез взаимна корелация на редиците  $a = \{4, 3, 1, 6\}$  и  $b = \{5, 2, 3\}$ , за да се получи  $r_{ab}(j)$ . Редицата  $b$  е разположена под редицата  $a$  и  $b$  е преместена наляво с един обратна единица, т.е. закъсняла, за всеки от следващите редове. Стойностите на взаимната корелация са дадени в последната колона вдясно.

Редица				Закъснение	
4	3	1	6		
3	5	2	3	0	
5	2	3	5	1	
2	3	5	2	2	
3	5	2	3	3	
5	2	3	5	1	

И т.н.  $r_{ab}(j)$  се повтаря.

Резултатът показва, че  $r_{ab}(j)$  се повтаря периодично, за всяка дискретна единица закъснение, т.е.  $r_{ab}(j)$  има същия период, както е периодът на по-късата редица  $b$ . Тази процедура се нарича циклична корелация. Да получим верния резултат, в който всеки елемент на  $a$  е умножен с единичен елемент на  $b$ , всички елементи на  $b$  трябва да бъдат преместени последователно под всяка стойност на  $a$ , както е показано по-долу:

4	3	1	6
5	2	3	
5	2	3	
5	2	3	
5	2	3	
5	2	3	

Вижда се, че са необходими 6 дискретни единици закъснение преди редицата  $b$  да се повтори. Редиците имат дължина 4 и 3, а числото на необходимия брой дискретни единици закъснение е  $4+3-1=6$ . Така може да се формулира следното правило за получаване на линейната взаимна корелация на две периодични редици с дължини  $N_1$  и  $N_2$ . Добавяме нули към всяка от редиците, така че дължината на всяка от тях да бъде  $N_1+N_2-1$ . Това означава, че към редицата с дължина  $N_1$  се добавят  $N_2-1$  нули, а към редицата с дължина  $N_2-N_1-1$  нули. Това е показано по-долу за дадените редици  $a$  и  $b$ :

Редица	Закъснение						$r_{ab}(j)$
4	3	1	6	0	0	0	
5	2	3	0	0	0	0	29
2	3	0	0	0	0	5	17
3	0	0	0	5	2	2	12
0	0	0	5	2	3	3	30
0	0	5	2	3	0	4	17
0	5	2	3	0	0	5	35
5	2	3	0	0	0	6	29

и т.н.  $r_{ab}(j)$  се повтаря.

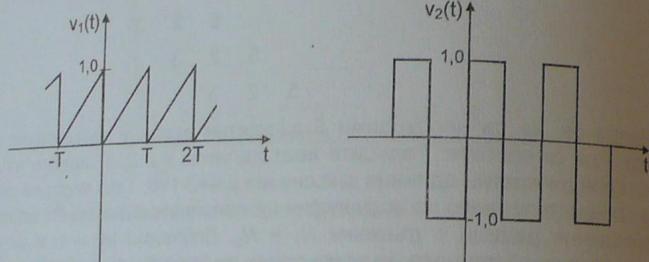
Тогава търсената линейна взаимна корелация на редиците  $a$  и  $b$  е

$$r_{ab}(j) = \{29, 17, 12, 30, 17, 35, 29\}.$$

Досега, в разглежданите примери на взаимна корелация се предполагаше, че всички данни са дискретни, но взаимната корелация може също да бъде извършена аналитично, когато е необходимо да се напише аналитичен израз за сигналите, включително когато се изисква секциониране на сигнализите. На практика, аналитичната процедура е еквивалентна на използването на аналогови схеми за реализиране на взаимна корелация. По-долу е даден пример за аналитична взаимна корелация.

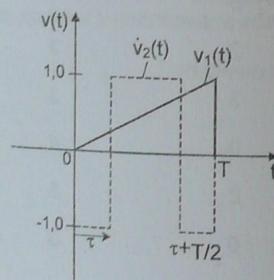
**Пример 3.3.** Да се пресметне взаимната корелация  $r_{12}(-t)$  на сигнали  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  от фиг. 3.6.

Лесно е да се извърши съекциониране на тези сигнали. Необходимо това да се направи само за един период  $T$  на сигналите, тъй като  $r_{12}(-\tau)$  ще бъде периодична функция на  $\tau$  с период  $T$ . Тогава,  $v_1(t) = t/T$  за  $0 \leq t \leq T$  и  $v_2(t) = -1,0$  за  $T/2 \leq t \leq T$ . Необходимо е да се получи израз за  $r_{12}(-\tau)$ . За целта правоъгълният сигнал  $v_2(t)$  трябва да бъде преместен дясно спрямо  $v_1(t)$ .



Фиг. 3.6. Сигналите  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  в примера за взаимната корелация

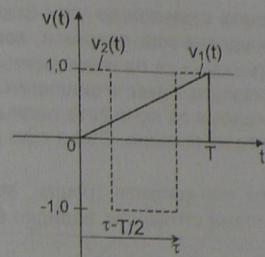
На фиг. 3.7 е показана ситуацията за  $0 \leq \tau \leq T$ . Вижда се, че  $v_1(t)$  трябва да бъде умножен с три секции на  $v_2(t)$ , като  $v_2(t)$  приема трите последователни стойности  $-1, 1, -1$ . От фиг. 3.8 се вижда, че последователните стойности на  $v_2(t)$  са  $1, -1, 1$  за интервала  $T/2 \leq t \leq T$ . Това означава, че има две части на решението, които трябва да бъдат еднакви за  $\tau = T/2$ .



Фиг. 3.7. Сигналът  $v_2(t)$  за  $0 \leq \tau \leq T$

От фиг. 3.7 се вижда, че взаимната корелация се разбива на три секции с граници  $t = \tau$ ,  $t = \tau + T/2$  и  $t = T$ . Тогава

$$\begin{aligned} r_{12}(-\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T v_1(t) v_2(t - \tau) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} \frac{t}{T} (-1) dt + \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau + T/2} \frac{t}{T} (1) dt + \frac{1}{T} \int_{\tau + T/2}^T \frac{t}{T} (-1) dt = \\ &= \frac{-1}{T^2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^\tau + \frac{1}{T^2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{\tau}^{\tau + T/2} - \frac{1}{T^2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{\tau + T/2}^T, \\ r_{12}(-\tau) &= -\frac{1}{4} + \frac{\tau}{T} \quad \text{за } 0 \leq \tau \leq T/2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

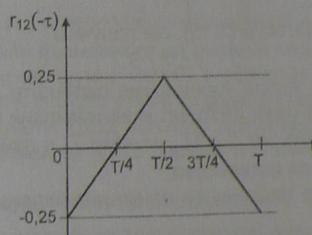


Фиг. 3.8. Сигналът  $v_2(t)$  за  $T/2 \leq \tau \leq T$

От фиг. 3.8 за  $T/2 \leq \tau \leq T$  можем да запишем

$$\begin{aligned} r_{12}(-\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \frac{t}{T} (1) dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^{\tau} \frac{t}{T} (-1) dt + \frac{1}{T} \int_{\tau}^T \frac{t}{T} (1) dt, \\ r_{12}(-\tau) &= \frac{3}{4} - \frac{\tau}{T} \quad \text{за } T/2 \leq \tau \leq T. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ако заместим  $\tau = T/2$ , в (3.9) и (3.10) ще получим  $r_{12}(-\tau) = \frac{1}{4}$  в двата случая, което потвърждава, че двете функции са подбрани коректно. На фиг. 3.9 е начертана функцията  $r_{12}(-\tau)$  за интервала  $0 \leq \tau \leq T$ .



Фиг. 3.9.  $r_{12}(-\tau)$  като функция на  $\tau$

Интересно е да се дадат някои пояснения за последователността при пресмятане на корелацията на сигнали с крайна дължина. С други думи, какъв е ефекта от крайната дължина на  $T$  при използването на формула (3.5) вместо (3.2)?

Отговор на този въпрос може да се даде, ако се разгледа само една синусоидална Фуриерова хармонична компонента на сигнала. Формула (3.2) даде вярната автокорелация, когато  $T \gg T_p$ , където  $T_p$  е периодът на синусоидата. Имаме

$$\begin{aligned} r_{11}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A \sin(\omega t) A \sin(\omega t + \tau) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2} \left[ \cos(\omega \tau) - \frac{\cos(\omega T)}{2\omega \tau} \sin(\omega \tau) \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Вторият член в дясната страната на тази формула клони към нула, когато  $T \rightarrow \infty$ , така че той представлява грешката, когато  $T \neq \infty$ . Членът  $\cos(\omega T)$  представлява грешката, дължаща се на периодичността, докато членът  $1/2$  дава основната част на грешката. Какво е влиянието на дължината на корелацията  $T$ ? Грешките са по-големи за по-късата редица и също са по-големи за нискочестотните компоненти на сигнала. Също така грешките са периодични с период  $T$ .

Членът  $\cos(\omega T)$  дава най-малките грешки, когато  $\omega T = [(2n+1)/2]\pi$ , т.е. като  $\omega = 2\pi/T_p$  и  $T$  приема големи стойности, валидно е неравенството

$$T \geq (2n+1) \frac{T_p}{4}. \quad (3.12)$$

Членът  $\sin(\omega T)$  е най-малък, когато  $\omega T = m\pi$ , където  $m$  е цяло число. Тогава

$$\tau = \frac{m}{2} T_p. \quad (3.13)$$

Сега е необходимо да направим някои приемливи допускания. Да приемем, че условието за голямо  $T$  се изпълнява за  $n \geq 10$ . Тогава за  $T \geq \frac{nT_p}{2}$  или

$$T \geq 5T_p. \quad (3.14)$$

Най-голямата допустима стойност на  $\tau$  за най-ниската честотна компонента ( $m=1$ ) предвид (3.13) удовлетворява неравенството

$$\tau < T_p. \quad (3.15)$$

Ако комбинираме (3.14) и (3.15), ще получим

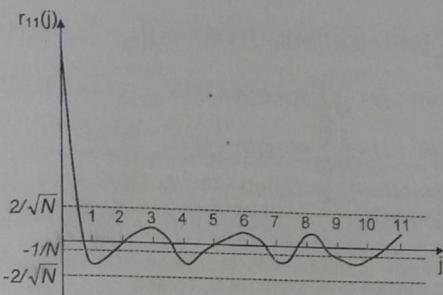
$$\tau \leq T/5.$$

Това означава, че когато корелираме сигналите, грешките дължащи се на крайната им дължина може да бъдат минимизирани по следните начини:

- 1) като се гарантира, че  $T \geq 5T_p$ , където  $T_p$  е най-ниската честотна компонента, която ни интересува;
- 2) при покриването на данните да не надвишава 20% от тяхната дължина.

Така например, ако телефонните речеви сигнали с лента от  $300\text{Hz}$  до  $3,4\text{kHz}$  и честота на дискретизиране  $40\text{kHz}$  се корелират,  $T_p = 1/300 = 3,3 \cdot 10^{-3}\text{s}$ . Най-малката допустима дължина на редиците ще бъде  $5 \cdot 3,3 \cdot 10^{-3}\text{s} = 16,7\text{ms}$ , а най-голямото корелационно преместване ще бъде  $3,33\text{ms}$  или 133 дискретни точки.

На фиг. 3.10 е показана графиката на  $r_{11}(j)$ , коефициентът на автокорелация на случаен сигнал, например бял шум. Стойността на математическото очакване на  $r_{11}(j)$ , която може да бъде намерена е  $E[r_{11}(j)] \approx 1/N$ , където  $N$  е броят на отчетите, а дисперсията е  $\text{var}[r_{11}(j)] \approx 1/N$ . Стойността на математическото очакване  $-1/N$ , показана на фигурата, е 95% от доверителните граници, които са от  $-1/N$  до  $\pm 2\sqrt{N}/N$ . Стойностите на  $r_{11}(j)$ , които попадат извън доверителния интервал могат да бъдат значителни, т.е. те могат да показват, че сигналът не е бил напълно случаен. Оказва се обаче, че даже когато сигналът е напълно случаен, то поне една точка от двадесет може да лежи извън тези граници.



Фиг. 3.10. Коефициентът на автокорелация на случаен сигнал

Автокорелационната функция на периодичен сигнал е също периодичен сигнал. Това лесно се доказва. Един сигнал  $x(t)$  е периодичен с период  $T$ , ако

$$x(t) = x(t + nT).$$

Тогава

$$r_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau+nT)dt,$$

т.e.

$$r_{11}(\tau) = r_{11}(\tau + nT). \quad (3.16)$$

Следователно  $r_{11}(\tau)$  е периодична функция на  $\tau$  с период  $T$ . Това е важно свойство, защото дава възможност да открием периодични сигнали в шум, когато отношението сигнал/шум е малко. В резултат на автокорелацията се намалява шума, докато в същото време се развива периодичната автокорелационна функция на сигнала. След неговото откриване, по-нататъшната обработка може да се използва, за да се определи формата му, ако това е необходимо.

От (3.11) се вижда, че автокорелационната функция на  $A \sin(\omega t)$  е  $(A^2/2)\cos(\omega\tau)$ . В този случай, както и в другите, амплитудата на автокорелационната функция е свързана по прост начин с тази на сигнала и може да бъде използвана за да се оцени амплитудата на сигнала. Друг често срещан случай е този, когато правоъгълен сигнал с амплитуда  $A$ , има правоъгълна автокорелационна функция с амплитуда  $A$ . Необходимо е да се отбележи, че автокорелационните функции не са единствени в смисъл на неповторими. То-ва означава, че от различни сигнали може да се получи една и съща автокорелационна функция. Следователно формата на сигналите не би могла да се определи от намерените автокорелационни функции.

Сега да разгледаме случая, в който сигналът  $v(t)$  е частично случаен. Това е случаят на зашумен сигнал, който може да бъде записан като сума от полезния сигнал  $s(t)$  и шума  $q(t)$

$$v(t) = s(t) + q(t). \quad (3.17)$$

Предполага се, че  $s(t)$  и  $q(t)$  не са корелирани. Дискретната автокорелационна функция на  $v(t)$  е  $r_v(j)$

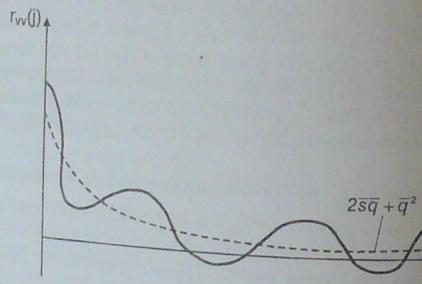
$$\begin{aligned}
r_{vv}(j) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [s(n) + q(n)] [s(n+j) + q(n+j)] = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n)s(n+j) + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n)q(n+j) + \\
&\quad + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} q(n)s(n+j) + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} q(n)q(n+j) = \\
&= r_{ss}(j) + E[s(n)q(n+j)] + E[q(n)s(n+j)] + E[q(n)q(n+j)] = \\
&= r_{ss}(j) + E[s(n)]E[q(n+j)] + E[q(n)]E[s(n+j)] + E[q(n)]E[q(n+j)] = \\
&= r_{ss}(j) + \overline{s(n)q(n)} + \overline{q(n)s(n)} + \overline{q(n)^2} = r_{ss}(j) + 2\bar{s}\bar{q} + \bar{q}^2.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Ако  $\bar{q} \rightarrow 0$  за големи стойности на  $N$ , тогава

$$r_{vv}(j) \rightarrow r_{ss}(j). \tag{3.22}$$

Ако  $N$  е малко число, членовете на взаимната корелация в (3.19) и автокорелацията на шума клонят към нула с нарастващото на закъснението.

Това означава, че автокорелационната функция на частично случаен сигнал, или на шума се състои от автокорелационната функция на полезния сигнал, насложена върху затихващата функция на шума, която зависи едновременно от компонентите на случайния и детерминирания сигнал и които се представят от  $2\bar{s}\bar{q} + \bar{q}^2$ . На фиг. 3.11 е начертана графиката  $r_{vv}(j)$ . Вижда се, периодичността на  $s(t)$  и че  $|r_{ss}(j)| > |(2\bar{s}\bar{q} + \bar{q}^2)|$ . Това дава възможност за създаване на метод за намиране на периода на зашумен сигнал (вж. 3.2.2).



Фиг. 3.11. Автокорелационната функция на зашумен сигнал

**Пример 3.4.** Да се намери взаимната корелация на два зашумени сигнала.

Нека двата сигнала са  $\{s_1(t) + q_1(t)\}$  и  $\{s_2(t) + q_2(t)\}$ . Дискретната взаимна корелация се определя по следния начин

$$\begin{aligned}
r_{12}(j) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [(s_1(n) + q_1(n))(s_2(n+j) + q_2(n+j))] = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [s_1(n)s_2(n+j) + s_1(n)q_2(n+j) + q_1(n)s_2(n+j) + q_1(n)q_2(n+j)] =
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_1(n)s_2(n+j) + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_1(n)q_2(n+j) + \\
&\quad + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} q_1(n)s_2(n+j) + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} q_1(n)q_2(n+j) = \\
&= r_{s_1s_2}(j) + r_{s_1q_2}(j) + r_{q_1s_2}(j) + r_{q_1q_2}(j).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Подобно на предния случай за автокорелацията, последните три членови в дясната страна на (3.23) клонят към нула, когато закъснението  $j$  нараства. За големи стойности на  $N$  формула (3.23) има вида

$$r_{12}(j) = r_{s_1s_2}(j) + \bar{s}_1\bar{q}_2 + \bar{q}_1\bar{s}_2 + \bar{q}_1\bar{q}_2. \tag{3.24}$$

Тогава взаимната корелация на два сигнала, когато  $j$  нараства, е  $r_{12}(j) \rightarrow r_{s_1s_2}(j)$ .

Направеният анализ до тук показва, че процесите на взаимна и автокорелация намаляват шумовата компонента и изчистват полезния сигнал.

### 3.2.2. Приложения на корелацията

От теория на сигналите е известно, че

$$F[r_{11}(\tau)] = G_E(f), \tag{3.25}$$

където  $G_E(f)$  е спектралната плътност на енергията на сигнала, т.е. спектралната плътност на енергията и автокорелационната функция образуват фурье-двойка на преобразуването. Може да бъде показано, че

$$r_{11}(0) = E, \tag{3.26}$$

където  $E$  е пълната енергия на сигнала.

**Пример 3.5.** Да се намери връзката между корелационните функции на два различни сигнала и техните пълни енергии, ако закъснението е нула.

Нека сигналите са  $v_1(n)$  и  $v_2(n)$ , а сумата им е  $V(n) = v_1(n) + v_2(n)$ . Автокорелационната функция на  $V(n)$  при нулево закъснение е

$$r_{vv}(0) = E_V = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [v_1(n) + v_2(n)]^2,$$

където  $E_V$  е енергията на сигнала  $V(n)$ .

$$\begin{aligned}
E_V &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [v_1^2(n) + v_2^2(n) + 2v_1(n)v_2(n)] = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v_1^2(n) + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v_2^2(n) + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 2v_1(n)v_2(n),
\end{aligned} \tag{3.27}$$

откъдето

$$E_V = r_{v_1v_1}(0) + r_{v_2v_2}(0) + 2r_{v_1v_2}(0).$$

Тази формула може да бъде записана още така

$$E_V = E_{v_1} + E_{v_2} + 2r_{v_1v_2}(0). \tag{3.28}$$

Енергията на сигнала  $V(n)$  е равна на сумата от енергията на компонентите му плюс  $2r_{v_1v_2}(0)$ , където  $r_{v_1v_2}(n)$  е функцията на взаимната корелация на сигналите  $v_1(n)$  и  $v_2(n)$ . Ако  $v_1(n)$  и  $v_2(n)$  не се корелират, тогава пълната енергия е точно сумата на енергията на компонентите.

Ако сигналите  $v_1(n)$  и  $v_2(n)$  са зашумени, така че  $v_1(n) = v'_1(n) + q_1(n)$  и  $v_2(n) = v'_2(n) + q_2(n)$ , тогава може лесно да се види, че

$$E_V = E_{v'_1} + E_{v'_2} + E_{q_1} + E_{q_2} + r_{v'_1v'_2}(0). \tag{3.29}$$

Използването на взаимната корелация за откриване и оценяване на периодични сигнали в шумова смес е цел на следващото разглеждане. Първото предположение е, че сигналът маскиран с шум може да бъде оценен чрез взаимна корелация с подходящ "еталонен" сигнал. Този сигнал може да се регулира по метода проба и грешка, като се водим от някакво предвиждане докато функцията на взаимната корелация достигне своя максимум. Тогава еталонен сигнал е тогава оценката на сигнала. Това предположение може да бъде потвърдено, ако се върнем към формула (3.22) и приемем, че за еталонния сигнал  $q_2(n)=0$ .

Уравнение (3.23) ще има вида

$$\begin{aligned} r_{12}(j) &= r_{s_1 s_2}(j) + r_{q_1 s_2}(j) = \\ &= r_{s_1 s_2}(j) + \bar{q}_1 \bar{s}_2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Тогава, тъй като  $\bar{q}_1 \rightarrow 0$ , когато  $N$  нараства,

$$r_{12}(j) \rightarrow r_{s_1 s_2}(j). \quad (3.31)$$

Очевидно е, че  $r_{s_1 s_2}(j)$  ще бъде максимална, когато  $s_2(n) = s_1(n)$ , като  $r_{s_1 s_2}(j)$  е автокорелационната функция на  $s_1(n)$ . Следователно като се промени формата на еталонния сигнал  $s_2(n)$  с цел да се осигури максимум функцията на взаимната корелация дава възможност чрез  $s_2(n)$  да се оцени  $s_1(n)$ .

Методът с използване на еталонен сигнал за оценка на сигнала е подходящ понякога, например, когато формата на сигнала е известна приблизително, какъвто е случаят с някои биомедицински сигнали. При този метод периодът на сигнала се оценява първоначално чрез автокорелиране на шумов сигнал, а след това шумовият сигнал се корелира с периодична импулсна редица с период, равен на този на сигнала. Получената функция на взаимна корелация служи за оценка на сигнала.

Нека  $s(n)$  е периодичен сигнал с период  $N_p$  точки ( $N_p < N$ ) и нека  $q(n)$  е шумът, така че зашуменият сигнал е  $S(n) = s(n) + q(n)$ . Нека  $\delta(n-kN_p)$  е периодична импулсна редица, използвана за взаимна корелация. Тогава

$$r_s(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [s(n) + q(n)] \delta(n - kN_p + j), \quad k=0, 1, 2, \dots. \quad (3.32)$$

Ако  $j=0$

$$r_{12}(0) = \frac{1}{N} [s(0) + q(0) + s(N_p) + s(2N_p) + q(2N_p) + \dots + s(N) + q(N)]. \quad (3.33)$$

Поради периодичността на сигнала  $s(n+kN_p) = s(n)$  за уравнение (3.33) можем да запишем

$$r_{12}(0) = \frac{1}{N} [Ns(0) + q(0) + q(N_p) + q(2N_p) + \dots + q(N)]$$

или

$$r_{12}(0) = s(0) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N/N_p} q(kN_p).$$

Когато  $N \rightarrow \infty$ ,  $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N/N_p} q(kN_p) \rightarrow 0$ , и следователно  $r_{12}(0) \rightarrow s(0)$ . Аналогично, за други стойности на  $j$

$$r(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [s(n) + q(n)] \delta[(n+j) - kN_p], \quad k=0, 1, 2, \dots$$

което е резултат от отстраняването на шума и представлява стойността на  $s(n)$  за  $n=1, 2, \dots$ . Тогава от (3.33) имаме

$$r_s(j) = s(0), s(1), \dots, s(N-1), \quad j=0, 1, 2, \dots,$$

което е необходимият сигнал. Така зашуменият сигнал може да бъде изчищен от шума по следния начин:

- 1) да се извърши автокорелация на сигнала, за да се намери периодът му;
- 2) да се извърши взаимна корелация с периодична импулсна редица със същия период, както сигнала.

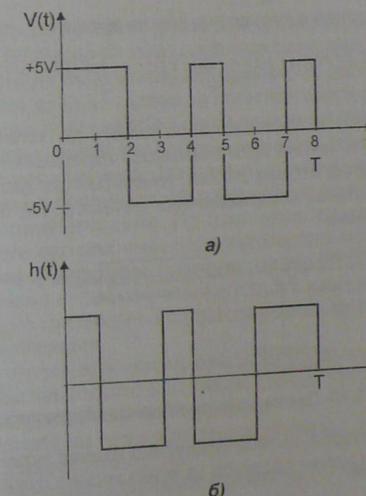
Едно друго приложение на корелацията е за извършване на корелационно детектиране в съгласуващ филтър. Съгласуващият филтър е филтър, който увеличава отношението  $S/N$  на изхода си. Неговата импулсна характеристика  $h(t)$  се дава с израза

$$h(t) = cs_i(T-t), \quad (3.36)$$

където  $c$  е произволна константа,  $s_i(t)$  е входният обезшумен сигнал

$$\begin{aligned} s_i(t) &= s_i(t) & \text{за } 0 \leq t \leq T, \\ s_i(t) &= 0 & \text{за } T < t < 0 \end{aligned}$$

и  $T$  е интервалът на дискретизиране на изходния сигнал на филтъра. Импулсната характеристика се получава, като сигналът се преобразува във времевата област и след това се премести като изпреварващ с  $T(s)$  по дължината на времевата ос. На фиг. 3.12a е показан импулсно кодово модулиран сигнал с дължина на думата 8 бита, а на фиг. 3.12b – импулсната характеристика на съгласуващ филтър, който ще увеличи отношението сигнал/шум след детектирането на този сигнал.



Фиг. 3.12. a) Сигнал, който е 8-битова ИКМ кодова дума;  
б) импулсна характеристика на съответния съгласуващ филтър

Сега ще бъде показано, че детектирането на съгласувания филтър е равивалентно на корелацията. Изходният сигнал на филтър  $y(t)$  се представя първоначално като конволюция на входния му сигнал  $s(t)$  с неговата импулсна характеристика (вж. т.3.3. за конволюцията):

$$y(t) = \int_{-\infty}^t s(\tau) h(t-\tau) d\tau, \quad (3.37)$$

където

$$s(t) = s_i(t) + q(t). \quad (3.38)$$

Тук  $t$  е закъснението, а  $q(t)$  е шумовата компонента, както обикновено.

След заместване на (3.38) в (3.37) се получава

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t [s_i(\tau) + q(\tau)] h(t-\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^t s_i(\tau) h(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t q(\tau) h(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Вторият член в дясната страна клони към нула, тъй като  $q(t)$  е случаен сигнал и е некорелиран с  $h(t-\tau)$ . Следователно

$$y(t) = \int_{-\infty}^t s_i(\tau) h(t-\tau) d\tau. \quad (3.39)$$

Сега от (3.36) имаме

$$h(t-\tau) = c s_i(T-t+\tau). \quad (3.40)$$

Комбинирането на (3.39) и (3.40) дава

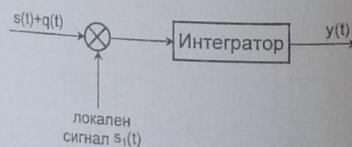
$$y(t) = \int_{-\infty}^t s_i(\tau) c s_i(T-t+\tau) d\tau. \quad (3.41)$$

Ако изходният сигнал е дискретизиран за време  $t=T$ , получава се

$$y(t) \approx \int_{-\infty}^t s_i(\tau) c s_i(\tau) d\tau \approx \int_{-\infty}^t s_i^2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t s_i^2(t) dt = r_{ff}(0), \quad (3.42)$$

ако  $c=1$ .

Следователно  $y(T)$  е автокорелацията на  $s_i(t)$ , когато закъснението е нула и може да бъде получена чрез взаимната корелация на зашумения входен сигнал със свободния от шум сигнал, генериран специално за тази цел. В това се състои работата на корелационния детектор. На фиг. 3.13 е дадена неговата принципна схема.

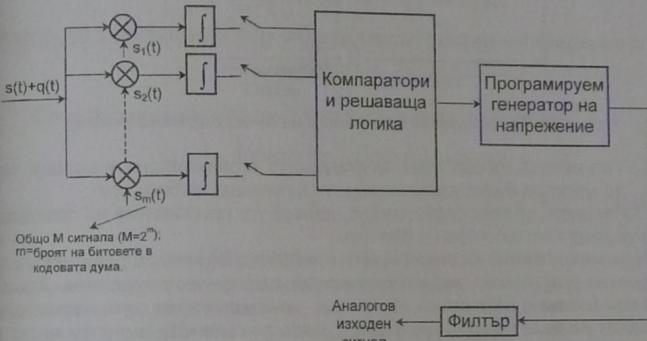


Фиг. 3.13. Схема на корелационен детектор

Например, детекторът за ИКМ (импулсно кодова модулация) би трябвало да съдържа корелационен детектор за всяка кодова дума, както е показано на фиг. 3.14.

Кодовите думи в цифровия детектор с  $m$ -битова дължина на кодовата дума се запомнят и умножават с  $m$  постъпващи бита. Максималната стойност

на дълчината ще се случи, ако (1)  $m$  постъпващите бита съответстват точно на  $m$ -битовата кодова дума или (2)  $m$  постъпващите бита съответстват случайно на  $m$ -битовата кодова дума. Вторият случай е нежелан. Той може да се случи, ако две съседни кодови думи съдържат редица от битове, еднаква с необходимата  $m$ -битова кодова дума, или ако кодовата дума се разруши. Тази възможност налага да се извърши синхронизиране на думите, така както се прави синхронизиране по битове при корелационния приемник.



Фиг. 3.14. Детектор с ИКМ кодова дума, който има за основа корелационния детектор

Това налага да се предявят определени изисквания за синхронизиране на кодовите думи. Те трябва да имат следните свойства:

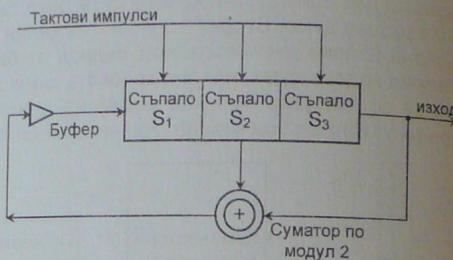
- 1) корелацията да бъде малка, ако времето за дискретизиране е  $t=T$ ;
- 2) корелацията да бъде голяма за отчетите, взети в момент  $t=T$ .

Кодовата дума с тези свойства ще бъде именно онази, която има голяма автокорелация при нулево закъснение, но малка автокорелация за други стойности на закъснението. Така детектирането на големи стойности на взаимната корелация в приемника ще означава синхронизиране на постъпващата дума със запомнената дума. По този начин се синхронизира приемника. Сега случаите сигнали имат това автокорелационно свойство и могат да бъдат използвани в цифровия приемник заедно с псевдошумовата редица (PN), генерирана лесно от преместващ регистър с изводи. На фиг. 3.15 е показан такъв генератор с три секции. Изходната редица се състои от 1,1,1,0,0,1,0, които след това се повтарят.

На фиг. 3.16 е показана автокорелационната функция генерирана, когато редицата е представена като биполярен сигнал. По-долу са дадени някои от свойствата на псевдошумовите (PN) редици:

- 1)  $m$ -битовата кодова дума произвежда редица с дължина  $2^m - 1$ .
- 2) Пиковите стойности са  $2^{m-1}$ .
- 3) Автокорелационната функция е равна на  $-1$  навсякъде с изключение на пиковите стойности.
- 4) Сигналът на изхода съдържа  $2^{m-1}$  на брой единици и  $2^{m-1} - 1$  на брой

нули.

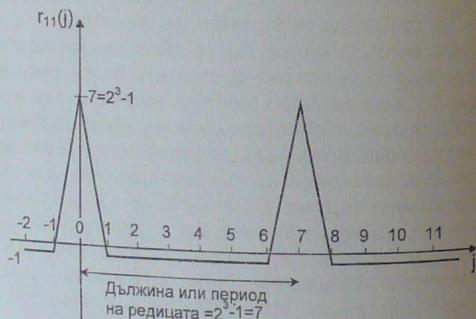


Фиг. 3.15. Тристъпален генератор на псевдошумова редица

5) Пътността на спектъра на мощността е равномерна и поради това могат да бъдат използвани като източници на бял шум.

Последното от тези свойства предлага друго приложение на псевдошумовата редица като източник на бял шум.

Друго приложение на корелацията и на псевдошумовата редица е за определяне на импулсната характеристика на електрически системи. Това е трудно при тестване на системи. Например, ако съществува шум, малките импулси могат да бъдат маскирани с шум, докато по-големите импулси могат да причинят претоварване. Трудно е, също така, да се поддържа равномерна пътността на спектъра на енергията в широка лента, като се използва единствен импулс. Псевдошумовата редица, обаче, има равномерен енергетичен спектър, както беше пояснено по-горе.



Фиг. 3.16. Автокорелационна функция на биполярен сигнал, генериран от тристъпален псевдошумов генератор

Също така, ако времето за измерване е кратно на дължината на редицата, вариацията при измерването ще бъде нула. Това води до малки времена за измерване и висока точност.

В основата на метода е да се подаде псевдошумова редица на входа на системата. Тогава импулсната характеристика се получава като взаимна корелация на тази редица с изходния сигнал. Това може да бъде извършено като

следва.

Нека  $q(t)$  е входната псевдошумова редица и нека  $y(t)$  е изходният сигнал на системата, която има импулсна характеристика  $h(t)$ . Тогава

$$r_{qq}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T q(t) q(t + \tau) dt = \quad (3.43)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T q(t) dt \int_0^T h(v) q(t - v + \tau) dv, \quad (3.44)$$

кой като  $y(t)$  е конволюцията на входния сигнал с импулсната характеристика

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v) q(t - v) dv. \quad (3.45)$$

След промяна на реда на интегриране в (3.44) се получава

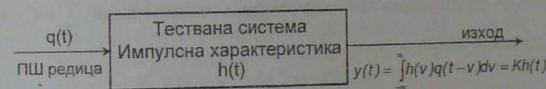
$$r_{qq}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v) dv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T q(t) q(t - v + \tau) dt = \quad (3.46)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(v) r_{qq}(\tau - v) dv. \quad (3.47)$$

Тук  $r_{qq}(\tau - v)$  се апроксимира с делта функция, защото това е автокорелационната функция на псевдошумовата редица. Формула (3.47) може да бъде записана по следни начин

$$r_{qq}(t) = K \int_{-\infty}^{\infty} h(v) \delta(t - v) dv = Kh(t), \quad (3.48)$$

където  $K$  е лицето на импулсната функция и е равно на средноквадратичната стойност на шума. Описаният метод е илюстриран на фиг. 3.17.



Фиг. 3.17. Определяне на импулсната характеристика на електрическа система

### 3.2.3. Бърза корелация

Пресмятането на корелацията може да бъде ускорено, ако се използва теоремата за корелацията. Обикновено тя се записва така

$$r_{12}(j) = F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)], \quad (3.49)$$

но коректният запис е

$$r_{12}(j) = \frac{1}{N} F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)], \quad (3.50)$$

където  $F_D^{-1}$  означава обратното дискретно преобразуване на Фурье (ОДПФ). Този метод изисква пресмятане на две дискретни преобразувания на Фурье (ДПФ) и едно ОДПФ, всяко от които може да се извърши лесно, ако се използва алгоритъмът за БПФ.

Ако броят на членовете на редицата е достатъчно голям, по-ефективно е да се използва методът на БПФ, отколкото да се пресмята непосредствено взаимната корелация.

### Доказателство на теоремата за корелацията

Нека  $x_1(l)$ ,  $x_2(r)$  и  $x_3(n)$  са периодични редици с дължина  $N$ , и нека те ОДПФ са съответно  $X_1(k)$ ,  $X_2(k)$  и  $X_3(k)$ . Освен това, нека

$$X_3(k) = X_1^*(k)X_2(k), \quad (3.52)$$

$$X_1^*(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x_1(l)e^{-j(2\pi/N)lk}, \quad (3.53)$$

и

$$X_2(k) = \sum_{r=0}^{N-1} x_2(r)e^{-j(2\pi/N)(-rk)}. \quad (3.54)$$

След заместване на (3.52) и (3.53) в (3.51) се получава

$$X_3(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x_1(l)e^{-j(2\pi/N)lk} \sum_{r=0}^{N-1} x_2(r)e^{-j(2\pi/N)(-rk)} \quad (3.55)$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} x_1(l)x_2(r)e^{-j(2\pi/N)(lk-rk)}. \quad (3.56)$$

От друга страна,

$$X_3(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_3(k)e^{j(2\pi/N)nk}. \quad (3.57)$$

След заместване на (3.55) в (3.56) се получава

$$\begin{aligned} X_3(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} x_1(l)x_2(r)e^{-j(2\pi/N)(lk-rk+nk)} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x_1(l) \sum_{r=0}^{N-1} x_2(r) \left[ \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j(2\pi/N)(l-r+n)k} \right]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Членът в квадратните скоби е равен на  $N$ , когато  $r=n+1$ , а когато  $r \neq n+1$  той може да бъде разглеждан като геометричен ред от вида  $\sum a x^n$ , на който сумата от първите  $N$  члена е

$$\frac{a(1-x^N)}{(1-x)}.$$

В този случай сумата е

$$\frac{1 - e^{-j(2\pi/N)(l-r+n)N}}{1 - e^{-j(2\pi/N)(l-r+n)}}. \quad (3.59)$$

Експонентната в числителя е винаги цяло число кратно на  $2\pi$ , и поради това експоненциалният член е единица. Оттук сумата е равна на нула, когато  $r \neq n+1$ . Формула (3.57) може да бъде записана по следни начин

$$X_3(n) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x_1(l) \sum_{r=0}^{N-1} x_2(r) N \delta(l-r+n), \quad (3.60)$$

в която  $\delta(l-r+n)=1$ , когато  $r=n+1$  и  $\delta(l-r+n)=0$ , когато  $r \neq n+1$ . След опростяване и заместване с  $r=n+1$  се получава

или

$$X_3(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x_1(l)x_2(l+n), \quad (3.61)$$

$$\frac{1}{N} X_3(n) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x_1(l)x_2(l+n). \quad (3.62)$$

Дясната страна на това уравнение е еквивалентна на взаимната корелация  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ , и се вижда, че е равна на  $(1/N)x_3(n)$ . От (3.56) имаме

$$x_3(n) = F_D^{-1}[X_3(k)]. \quad (3.63)$$

От комбинирането на (3.61), (3.62) и (3.50) се получава

$$\frac{1}{N} F_D^{-1}[X_3(k)] = r_{12}(n) = \frac{1}{N} F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)]. \quad (3.64)$$

Накрая, като заместим  $n$  с  $j$  получаваме

$$r_{12}(j) = \frac{1}{N} F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)]. \quad (3.65)$$

**Пример 3.6.** Намерете взаимната корелация на двете редици  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ , като използвате теоремата за корелацията:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \{1, 0, 0, 1\}, \\ x_2(n) &= \{0, 5, 1, 1, 0, 5\}. \end{aligned}$$

Ще използваме теоремата за корелацията – формула (3.64). Редицата  $X_1(k)$  може да бъде намерена с алгоритъм за БПФ и има вида

$$X_1(k) = 2, 1+j, 0, 1-j$$

и следователно

$$X_1^*(k) = 2, 1-j, 0, 1+j.$$

$X_2(k)$  може да се получи по същия начин. За нея  $x_0=0,5$ ;  $x_1=1$ ;  $x_2=1$  и  $x_3=0,5$ ,

$$\begin{aligned} X_{21}(0) &= x_0 + x_2 = 1,5 \\ X_{21}(1) &= x_0 - x_2 = -0,5 \\ X_{22}(0) &= x_1 + x_3 = 1,5 \\ X_{22}(1) &= x_1 - x_3 = 0,5 \\ X_{11}(0) &= X_{21}(0) + X_{22}(0) = 3 \\ X_{11}(1) &= X_{21}(1) + (-j)X_{22}(1) = -0,5 - j0,5 \\ X_{11}(2) &= X_{21}(0) - X_{22}(0) = 0 \\ X_{11}(3) &= X_{21}(1) - (-j)X_{22}(1) = -0,5 + j0,5. \end{aligned}$$

Тогава за двете редици можем да запишем

$$\begin{aligned} X_1^*(k) &= 2, 1-j, 0, 1+j \\ X_2(k) &= 3, -0,5 - j0,5, 0, -0,5 + j0,5 \end{aligned}$$

и следователно

$$\begin{aligned} X_1^*(1)X_2(1) &= 2 \cdot 3 = 6 \\ X_1^*(2)X_2(2) &= (1-j)(-0,5 - j0,5) = -1 \\ X_1^*(3)X_2(3) &= 0 \cdot 0 = 0 \\ X_1^*(4)X_2(4) &= 0,5(1+j)(-1+j) = -1, \end{aligned}$$

откъдето

$$[X_1^*(k)X_2(k)] = 6, -1, 0, -1.$$

Сега е необходимо да се извърши ОДПФ. За целта знаците на експонентите (в тегловите множители  $W_N$ ) в горния алгоритъм за БПФ се променят и резултатът се дели на  $N$ . Така, без да се променят означенията в алгоритъма, се получава

$$\begin{aligned}
 X_{21}(0) &= x_0 + x_2 = 0 \\
 X_{21}(1) &= x_0 - x_2 = 0 \\
 X_{22}(0) &= x_1 + x_3 = -2 \\
 X_{22}(1) &= x_1 - x_3 = 0 \\
 X_{11}(0) &= X_{21}(0) + X_{22}(0) = 4 \\
 X_{11}(1) &= X_{21}(1) + jX_{22}(1) = 6 \\
 X_{11}(2) &= X_{21}(0) - X_{22}(0) = 8 \\
 X_{11}(3) &= X_{21}(1) - jX_{22}(1) = 6
 \end{aligned}$$

Компонентите на  $F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)]$  се получават чрез деление на стойностите на  $X_{11}(0), X_{11}(1), X_{11}(2)$  и  $X_{11}(3)$  с  $N=4$ . Получава се  $F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)] = 1; 1,5; 2; 1,5$ .

От (3.64) можем да запишем

$$r_{12}(j) = \frac{1}{4} F_D^{-1}[X_1^*(k)X_2(k)] = \{0,25; 0,375; 0,5; 0,375\}. \quad (3.65)$$

Корелацията ще бъде кръгова (циклична), защото всички данни са периодични с период  $N$ . Взаимната корелация  $r_{12}(j)$  може да бъде пресметната непосредствено

$$\begin{aligned}
 r_{12}(0) &= (1,0,5 + 0,0 + 1,0,5) / 4 = 0,25 \\
 r_{12}(1) &= (1,1 + 0 + 0 + 1,0,5) / 4 = 0,375 \\
 r_{12}(2) &= (1,1 + 0 + 0 + 1,1) / 4 = 0,5 \\
 r_{12}(3) &= (1,0,5 + 0 + 0 + 1,1) / 4 = 0,375.
 \end{aligned}$$

Следващата стойност  $r_{12}(4) = 0,25$  е същата, както  $r_{12}(0)$ , и редицата се повтаря периодично. Това е кръгова корелация, както бе описана в т.3.2.1. Този резултат съответства на този, получен по-горе чрез използване на теоремата за корелацията. Тази теорема може да бъде използвана за да се извежда линейна корелация чрез добавяне на допълнителни нули към двете редици, както бе обяснено в т.3.2.1. Така например, ако дължините на редиците са  $N_1$  за  $x_1(n)$  и  $N_2$  за  $x_2(n)$ , тогава  $N_2-1$  на брой нули се добавят към  $x_1(n)$  и  $N_1-1$  към  $x_2(n)$ . Взаимната корелация се пресмята като се използват тези две разширени редици. Този метод на пресмятане на взаимна корелация чрез използване на теоремата за корелацията и БПФ се нарича бърза корелация.

Пресмятането на взаимната корелация може също да бъде ускорено чрез въвеждане на рекурсивност и това ще бъде илюстрирано за случая на нулево захиснение. Тогава взаимната корелация на двата дискретизирани сигнала  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  е

$$r_{12}(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n). \quad (3.66)$$

Това изисква пресмятане на  $N$  произведения,  $N-1$  суми и едно деление. Това може да отнеме много време при работа в реално време, когато двойките данни на двете редици ще постъпват със скоростта на дискретизиране. Пресмятането трябва да бъде повторено, когато следващата двойка данни пристигне. Новото пресмятане ще се различава от предното само по това, че произведението на новите данни трябва да бъде прибавено към сумата от произведението на двойките, а първото произведение трябва да бъде извадено.

Следователно, за всяка взаимна корелация:

$$\text{Новата стойност} = \text{предната стойност} + \frac{1}{N} (\text{произведенето на двойките нови данни}) - \frac{1}{N} (\text{произведенето на първите две данни}). \quad (3.67)$$

Това е основата на рекурсивния алгоритъм. Сега всяка стъпка на взаимната корелация изисква едно умножение, едно изваждане, едно събиране и едно деление, при условие, че се запомнят произведенета от двойките данни. Ако корелацията е  $N$ -точкова, рекурсивният алгоритъм дава точни стойности след пресмятането на първите  $N-1$  точки.

В много приложения е необходимо да се намери начин за установяване на данните в състояние нула, т. нар. нулиране. Например, да се отстранят постояннотоковите нива от електрическите сигнали. Това изисква пресмятане на средната стойност на сигналите и след това изваждането й от всички дискретни стойности. Това пресмятане на средната стойност може също да бъде извършено рекурсивно, тъй като за всяка нова двойка от данни:

$$\begin{aligned}
 \text{Новата средна стойност} &= \text{предната средна стойност} + \\
 &+ \frac{1}{N} (\text{новите данни} - \text{първите данни}).
 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Също така, възможно е да се комбинира изваждането на средното ниво и пресмятането на взаимната корелация в един рекурсивен алгоритъм. Нека са дадени двата сигнала

$$\bar{x}_1(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \quad (3.69)$$

и

$$\bar{x}_2(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n). \quad (3.70)$$

Стойността на функцията на взаимната корелация на  $k$ -тата съвкупност от  $N$  точки е

$$r_{12}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n). \quad (3.71)$$

Когато средните стойности бъдат отстранени, стойността на функцията на взаимната корелация  $r_{12}^*(k)$  е

$$r_{12}^*(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x_1(n) - \bar{x}_1(k)][x_2(n) - \bar{x}_2(k)]. \quad (3.72)$$

Това представяне, след разкриване на скобите, се записва така

$$r_{12}^*(k) = r_{12}(k) - \bar{x}_1(k)\bar{x}_2(k). \quad (3.73)$$

След комбиниране на (3.67) и (3.70) се получава

$$r_{12}(k) = r_{12}(k-1) + \frac{1}{N} [x_1(k)x_2(k) - x_1(k-N)x_2(k-N)]. \quad (3.74)$$

От (3.68) можем да запишем

$$\bar{x}_1(k) = \bar{x}_1(k-1) + \frac{1}{N} [x_1(k) - x_1(k-N)] \quad (3.75)$$

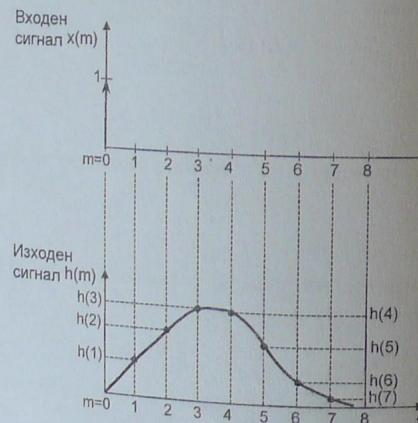
и

$$\bar{x}_2(k) = \bar{x}_2(k-1) + \frac{1}{N} [x_2(k) - x_2(k-N)]. \quad (3.76)$$

Формулите (3.73)-(3.76) съставляват рекурсивния алгоритъм, който корнира изваждането на средната стойност от данните с пресмятането на взаимната корелация. Всяко изчисление изисква само три умножения, четири изваждания, три събирания и четири деления. Изборът на  $N$  трябва да бъде направен внимателно, когато средните стойности на данните се променят, в противен случай може да се получи неверен резултат.

### 3.3. Конволюция

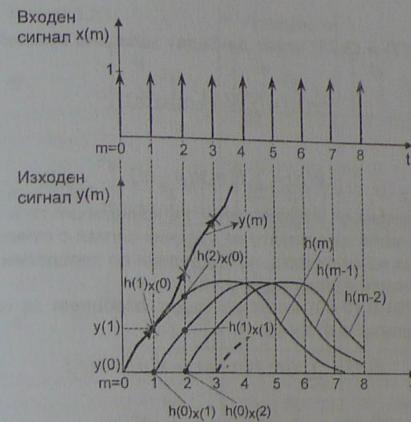
Терминът конволюция описва, освен други неща, по какъв начин входният сигнал на една система си взаимодейства със системата, за да произведе изходният сигнал. Обикновено изходният сигнал закъснява и затихва, или е усилен вариант на входния сигнал. От особено значение е да се разгледа изходният сигнал на система, получен при импулсен входен сигнал. Това е та<sup>ка</sup>, защото всеки входен сигнал може да бъде представен като редица от импулси с различни нива. Изходният сигнал на системата, получен от импулсни входен сигнал, няма да бъде точно негово копие, а ще се променя във времето, като преминава през максимум, както е посочено на фиг. 3.18. От него се вижда, че ако интервалът на дискретизиране е  $t$ , изходният сигнал, произведен от единичен импулс, подаден в момента 0, е  $h(m)$ . Реакцията на системата се нарича импулсна характеристика  $h(m)$  на системата.



Фиг. 3.18. Входен импулс и съответната импулсна характеристика на системата

Нека сега да разгледаме случая, когато редицата от импулси  $x(t)$  е подадена на входа в дискретните моменти  $t$  – фиг. 3.19. Изходният сигнал в момента 0 е  $y(0)$ , като

$$y(0) = h(0)x(0).$$



Фиг. 3.19. Входна импулсна редица и реакция на системата, получена от отделните импулсни реакции

В дискретния момент  $m=1$  изходният сигнал ще бъде  $h(0)x(1)$  – влиянието на текущия входен сигнал  $x(1)$  плюс влиянието на закъснението  $h(1)x(0)$  върху подадения входен сигнал в дискретния момент  $m=0$ . Тогава

$$y(1) = h(1)x(0) + h(0)x(1).$$

Аналогично, за следващите отчети на изходния сигнал можем да запишем

$$\begin{aligned} y(2) &= h(2)x(0) + h(1)x(1) + h(0)x(2), \\ y(3) &= h(3)x(0) + h(2)x(1) + h(1)x(2) + h(0)x(3), \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$y(n) = h(n)x(0) + h(n-1)x(1) + \dots + h(0)x(n).$$

По този начин изходният сигнал може да бъде записан като линейна форма от влияниятия на предните входни отчети, ако системата е линейна. Формула (3.77) описва начина на формиране на изходния сигнал на линейна система от първи ред.

Внимателното преглеждане на горните изрази показва, че изходният сигнал е получен чрез умножение на входната редица със съответните точки на функцията на импулсната характеристика, но в обратен ред. По подобен начин, тъй като формула (3.77) може да бъде записана равностойно по следния начин

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(n)x(0) \quad (3.78)$$

изходният сигнал може да бъде разгледан като произведение на съответни двойки на точки от функцията на импулсната характеристика с обрнатата във времето входна редица. Следователно сумата на конволюцията е еквивалентна на взаимната корелация на една редица с обрнатата във времето

втора редица.

Формули (3.77) и (3.78) могат да бъдат записани компактно по следния начин

$$y(n) = \sum_{m=0}^n h(n-m)x(m)$$

M

$$y(n) = \sum_{m=0}^n h(m)x(n-m)$$

Тези две функции се наричат суми на конволюцията и представляват суми от произведението на отчетите на входния сигнал с отчетите на импулсната характеристика на системата, но подредени по определен начин, а то е – сумата от аргументите е винаги равна на  $n$ .

Формули (3.79) и (3.80) могат да бъдат обобщени за сигнали с безрайна дължина и тогава се записва

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) \otimes h(n)$$

4

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(n) \otimes x(n)$$

Те представляват обобщени форми на сумата на конволюцията. Символът  $\otimes$  означава операцията конволюция.

Ако входният сигнал е непрекъсната редица от импулси, горните суми могат да бъдат заменени с интеграли. Така например, вместо формула (3.8) ще запишем

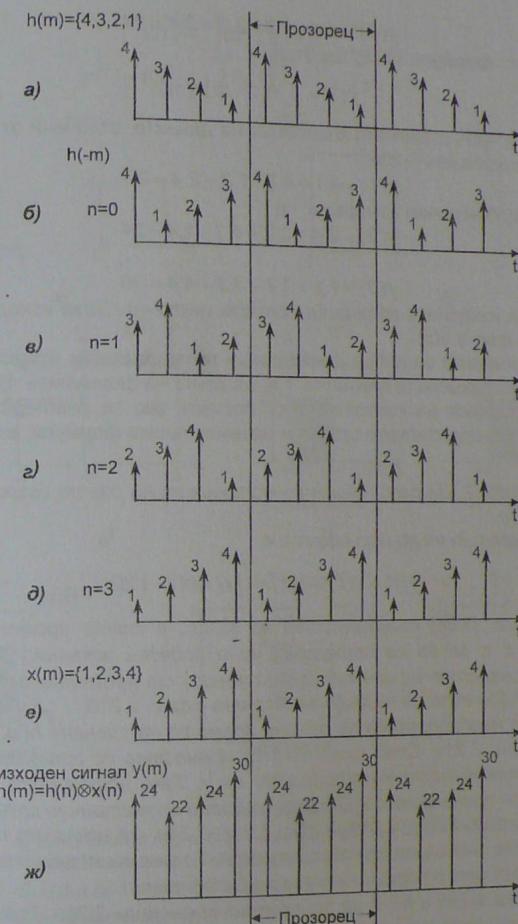
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$$

която е известна като интеграл на конволовцията

Досега терминът конволюция беше използван, за да се опише резултатът, който се получава, когато се извършва конволюция на импулсната характеристика на системата и нейния входен сигнал. Обаче, идеята може да бъде разширена за конволюция на две произволни множества от данни и този термин да бъде разглеждан в много по широки рамки.

Да разгледаме като пример двете периодични времеви редици  $\{h(m)\}$  и  $\{x(m)\}$ :  $(1, 2, 3, 4)$ , с които трябва да се извърши конволюция. На фиг. 3.20a е дадена редицата  $\{h(m)\} = (4, 3, 2, 1)$ , а на фиг. 3.20b – редицата  $\{h(-m)\} = (1, 2, 3, 4)$ , която е обрънатата във времето редица  $\{h(m)\}$ . Ше припомним, че сумата на конволюцията изисква елементите на едната редица да бъдат умножени член по член с елементите на обрънатата във времето втора редица, което съответства на взаимната корелация на едната редица обрънатата във времето втора редица.

На същата фигура е показан също прозорец с широчина равна на един период, за който конволюцията се пресмята. Очевидно е, че получението на зултат ще бъде периодичен, както съответният случай на циклична корелация – т.3.2.1 и поради това е необходимо да се пресметне само конволюцията за интервала, определен от прозореца. На фиг. 3.20e е показана втората редица  $\{x(m)\}: (1, 2, 3, 4)$  за сравнение.



Фиг. 3.20. Конволюцията  $y(m)$  на  $h(n)$  и  $x(n)$ .  
 а) Периодичната редица  $h(m)$ ; б) Обърнатата във времето редица  $h(-m)$ ;  
 от в) до д) Вариантите на  $h(-m)$ , преместена надясно за различни  
 закъснения; е) Редицата  $x(m)$ ; ж) Редицата на изхода  $h(n) \otimes x(n)$

Ако  $n=0$ , формула (3.79) ще бъде

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n h(-m)x(m)$$

и е получена чрез взаимна корелация на данните, отсечени от прозореца – фиг. 3.20б и ведицата от фиг. 3.20е:

$$y(0) = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24.$$

Ако  $n=1$  формула (3.79) ще бъде

$$y(1) = \sum_{m=0}^n h(1-m)x(m)$$

и е получена чрез взаимната корелация на данните, отсечени от прозорец, фиг. 3.20в и редицата 3.20e:

$$y(1) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 22.$$

По подобен начин намираме, че

$$y(2) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 24$$

и

$$y(3) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 30$$

и по-нататък изходната редица се повтаря циклично. Тази изходна редица е показана на фиг. 3.20r.

Ако сигналите са добре дефинирани математически, конволюцията ще бъде извършена аналитично, т.е. на езика на формулите. По-добро разбиране на процеса на конволюция се постига, ако се разгледат паралелно графично последователните стъпки и математичните формули, които им съответстват.

**Пример 3.7.** Да разгледаме конволюцията на двата сигнала  $x(t)$  и  $h(t)$  от фиг. 3.21a.

Интегралът на конволюцията е

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (3.84)$$

Формула (3.84) съответства на (3.83), в която променливата  $\tau$  е заместена с  $t$ , за да се отбележи, че е подаден закъснял във времето сигнал. Интегралът на конволюцията зависи от променливата  $t$  и поради това фиг. 3.21a трябва да бъде заместена с фиг. 3.21b.

Сега е необходимо да се обърне времето на сигнала  $h(t)$ , както е казано на фиг. 3.21b. След това  $h(-t)$  се премества по отношение на  $x(t)$  в посока на положителните стойности на  $t$ . Така полученият сигнал започва да се прилокира с  $x(t)$  в пет отделни геометрични стъпки, както е показано на фиг. 3.21c, 3.21d, 3.21j, 3.21z, 3.21u. За всяка от тези стъпки съответства интеграл на конволюцията. Тогава конволюцията  $x(t) \otimes h(t)$  представлява пет отделни непрекъснати области.

**Стъпка 1.**  $t < 0$  и  $h(t-t)$  не прилокира  $x(t)$  – фиг. 3.21g. Тъй като делът функции само се допират външно,  $x(t)h(t-t) = 0$  за всяко  $t$  и интегралът на конволюцията е нула.

**Стъпка 2.**  $0 < t \leq 2$  и имаме частично прилокливане между  $h(t-t)$  и  $x(t)$  – фиг. 3.21d. За този интервал

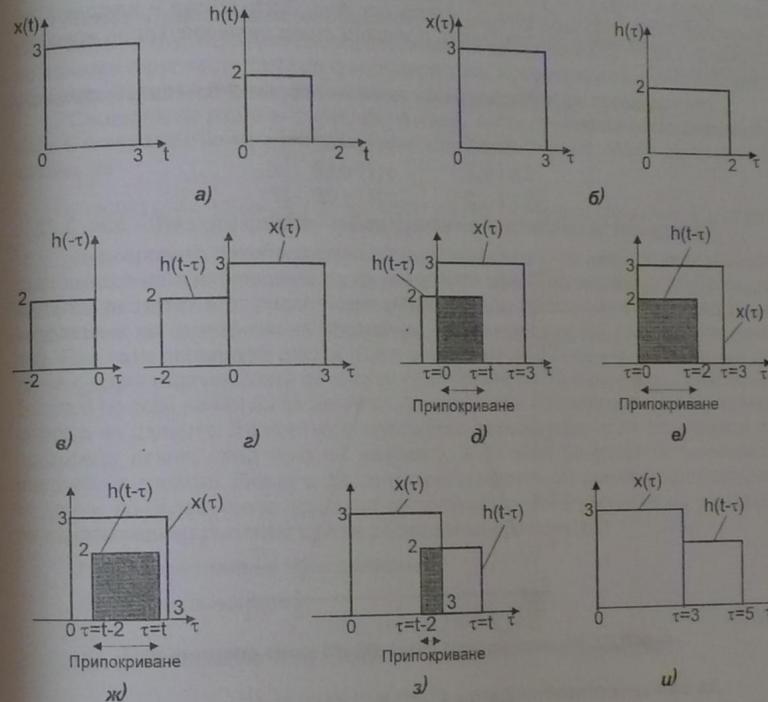
$$y(t) = \int_{\tau=0}^{t=1} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{\tau=0}^{t=1} (3)(2)d\tau,$$

$$y(t) = 6[\tau]_0^1 = 6t, \quad 0 < t \leq 2.$$

На фиг. 3.21e е показван случаят, когато  $t=2$ .

**Стъпка 3.**  $2 \leq t \leq 3$  и имаме пълно прилокливане на  $h(t-t)$  и  $x(t)$  – фиг. 3.21j. За този интервал

$$y(t) = \int_{\tau=t-2}^t (3)(2)d\tau = 6[\tau]_{t-2}^t, \\ y(t) = 6(t-t+2) = 12, \quad 2 \leq t \leq 3. \quad (3.86)$$



фиг. 3.21

- Сигналите  $x(t)$  и  $h(t)$ , с които трябва да бъде извършена конволюцията аналитично;
- $x(t)$  и  $h(t)$  като функция на  $t$ ;
- $h(-t)$  като функция на  $t$ ;
- $h(t-t)$  и  $x(t)$  като функции на  $t$ ;  $t < 0$ ,  $h(t-t)$  не прилокива  $x(t)$ ;
- $h(t-t)$  и  $x(t)$  като функции на  $t$ ;  $0 < t \leq 2$ . Появява се първото частично прилокливане между  $h(t-t)$  и  $x(t)$ ;
- $h(t-t)$  и  $x(t)$  като функции на  $t$ ;  $t=2$ . Край на първото частично прилокливане;
- $h(t-t)$  и  $x(t)$  като функции на  $t$ ;  $2 < t \leq 3$ . Получава се пълно прилокливане между  $h(t-t)$  и  $x(t)$ ;
- $h(t-t)$  и  $x(t)$  като функции на  $t$ ;  $3 < t \leq 5$ . Появява се второ частично прилокливане между  $h(t-t)$  и  $x(t)$ ;
- $h(t-t)$  и  $x(t)$  като функции на  $t$ ;  $t > 5$ .  $h(t-t)$  не прилокива  $x(t)$ .

Стъпка 4.  $3 \leq t \leq 5$ . Това е друг вид припокриване, показано на фиг. 3.21.

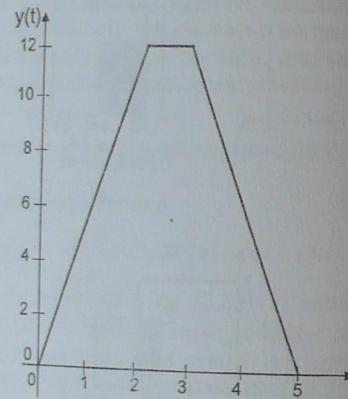
$$y(t) = \int_{t=2}^{t=3} (3) \cdot (2) = 6[\tau]_{t=2}^3 = 6(5-t) = 30 - 6t. \quad (3.8)$$

Стъпка 5.  $t > 5$ . Както се вижда от фиг. 3.21и, това е втората област, в която няма припокриване и поради това интегралът на конволюцията е нула.

Интегралът на конволюцията за етапите от 2 до 4 има някаква определена стойност

$$\begin{aligned} 0 < t \leq 2 & \quad y(t) = 6t, \\ 2 \leq t \leq 3 & \quad y(t) = 12, \\ 3 \leq t \leq 5 & \quad y(t) = 30 - 6t. \end{aligned}$$

Тези данни са послужили за начертаване на графиката  $y(t)$  – фиг. 3.22



Фиг. 3.22. Конволюцията  $y(t) = h(t) \otimes x(t)$  като функция на  $t$

Да запишем отново формули (3.81) и (3.83)

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) \otimes h(n) \quad (3.81)$$

и

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda. \quad (3.83)$$

От формулите се вижда, че конволюцията се извършва във времевата област. Възможно е този процес да протече в честотната област. В този случай сигналът на изхода на системата  $Y(f)$  е функция на честотата  $f$ . Валидна е формулата

Където  $H(f)$  е функцията на честотната характеристика на системата, а  $X(f)$  е фуриерово преобразуване на входния сигнал  $x(t)$ . Може също да бъде показано, че  $H(f)$  е фуриерово преобразуване на  $h(t)$ . Обратното фуриерово преобразуване на уравнение (3.88) е

$$F^{-1}[Y(f)] = y(t) = F^{-1}[H(f)X(f)]. \quad (3.89)$$

От съвместното разглеждане на (3.83) и (3.89) можем да запишем

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = x(y) \otimes h(t) = F^{-1}[H(f)X(f)]. \quad (3.90)$$

От тази формула се вижда, че конволюцията на два сигнала във времевата област е равностойна на обратното фуриерово преобразуване на произведението от фуриеровите преобразувания на двата сигнала. Този извънредно полезен факт често пъти се формулира така. Конволюцията във времевата област е еквивалентна на умножение в честотната област.

Съществува дуална формула на тази. Конволюцията в честотната област е еквивалентна на умножение във времевата област. Може да бъде показано, че

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega-u)H(u)du = X(f) \otimes H(f) = F[y(t)] = F[x(t)h(t)]. \quad (3.91)$$

Фуриерово преобразуване на произведението на две времеви редици съответства на конволюцията на фуриеровите преобразувания на двете редици. Този резултат е от практическо значение при обяснението на процеса на използване на функцията на прозорец, който предства спектралния анализ. При тази процедура дискретната редица от данни се умножава точка по точка с друга редица, която се състои от отчетите на функцията на прозорец. Целта е по този начин да се намалят грешките при пресмятане на енергийния спектър на данните. Дискретното фуриерово преобразуване на отсечението от прозорец данни, след това се пресмята, а от този резултат се изчислява енергийния спектър. Целта е да се получи енергийният спектър на редицата от данни, но онова, което всъщност се получава, е конволюцията на спектъра на едната редица със спектъра на редицата на прозорец.

### 3.3.1. Свойства на конволюцията

1) Комутативен закон

$$x_1(t) \otimes x_2(t) = x_2(t) \otimes x_1(t). \quad (3.92)$$

Ще отбележим, че това равенство е идентично на равенството

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau.$$

2) Дистрибутивен закон

$$x_1(t) \otimes [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) \otimes x_2(t) + x_1(t) \otimes x_3(t). \quad (3.93)$$

3) Асоциативен закон

$$x_1(t) \otimes [x_2(t) \otimes x_3(t)] = [x_1(t) \otimes x_2(t)] \otimes x_3(t). \quad (3.94)$$

Тези свойства могат да бъдат доказани или като се извърши интегрирането, или като се заместят конволюциите с означенията на взаимната корелация на една редица с обрънатата във времето втора редица.

### 3.3.2. Кръгова (циклична) конволюция

В т.3.2.1 беше показано, че резултатът от корелацията на две периодични редици с еднаква дължина е кръгова (циклична) редица с период, равен на периода на по-късата редица, което е неточен резултат. Същото ще бъде вярно за конволюцията, тъй като конволюцията е еквивалентна на взаимната корелация на една редица с обрънатата във времето втора редица.

Следователно, така както при корелацията, така и при конволюцията е необходимо двете редици да имат еднаква дължина.

Ако дълчините на редиците са  $N_1$  и  $N_2$ , тогава  $N_2-1$  на брой нули трябва да бъдат добавени към редицата с дължина  $N_1$  и  $N_1-1$  – към редицата с дължина  $N_2$ . Сега и двете редици ще имат еднаква дължина  $N_1 + N_1 - 1$ , и линейната конволюция ще бъде извършена коректно.

### 3.3.3. Бърза линейна конволюция

В т.3.2.3 беше показано по какъв начин може да се ускори пресмятането на корелацията като се използва теоремата за корелацията. Подобна теорема, теорема за конволюцията, съществува и в случая за конволюция. За времевата област можем да запишем

$$x_1(l) \otimes x_2(r) = F_D^{-1}[X_1(k)X_2(k)]. \quad (3.95)$$

Това е теоремата за конволюцията. Тук  $F_D^{-1}$  означава обратно дискретно фуриерово преобразуване,  $X_1(k)$  е дискретно фуриерово преобразуване на  $x_1(l)$  и  $X_2(k)$  – дискретно фуриерово преобразуване на  $x_2(r)$ . Сигналите  $x_1(l)$  и  $x_2(r)$  са периодични редици с дължина  $N$ .

#### Доказателство на теоремата за конволюцията

Доказателството на тази теорема е почти еднакво с това на теоремата за корелацията, дадено в т.3.2.3. При конволюцията едната от редиците обръната и поради това, вместо формула (3.52) се използва нейната спречната

$$X_1(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x_1(l) e^{j(2\pi/N)(-lk)}, \quad (3.96)$$

докато формула (3.53) се използва отново в същия вид

$$X_2(k) = \sum_{r=0}^{N-1} x_2(r) e^{j(2\pi/N)(-rk)}. \quad (3.97)$$

Тогава можем да дефинираме периодичната редица  $x_3(n)$  с дължина  $N$ , на която ДПФ  $X_3(k)$  се определя по следния начин

$$X_3(k) = X_1(k)X_2(k). \quad (3.98)$$

Може да приложим процедурата от т.3.2.3 и записваме следния резултат

$$x_1(l) \otimes x_2(r) = F_D^{-1}[X_1(k)X_2(k)] \quad (3.99)$$

а конволюцията във времевата област.

По подобен начин, за конволюцията в честотната област е формулата

$$\frac{1}{N} [X_1(k) \otimes X_2(k)] = F_D[X_1(l)x_2(r)]. \quad (3.100)$$

Последните две уравнения представляват периодична, или кръгова конволюция, която може да бъде превърната в линейна чрез прибавяне на нули, както е описано в т.3.3.2.

### 3.3.4. Изчислителни предимства на бързата линейна конволюция

Методът на бързата линейна конволюция дава предимство единствено с по-голямата изчислителна скорост в сравнение с непосредственото пресмятане, ако броят на отчетите, с които ще се извърши конволюцията, е достатъчно голям. Броят на умноженията, необходими за извършване на конволюцията с обикновения (класическия) метод и бързите методи служат като мярка

за сравнение на тяхната изчислителна ефективност.

Необходимите изчисления при директния метод могат да се определят от формули (3.77). От тях се вижда, че за получаване на линейната конволюция на две  $N$ -точкови редици  $h(n-m)$  и  $x(m)$  е необходимо да се умножи всяка стойност на  $h(n-m)$  с всяка стойност на  $x(m)$ . Следователно  $N$  стойности на  $h(n-m)$  се умножават с  $N$  стойности на  $x(m)$ . Това прави общо  $N \times N = N^2$  умножения.

Да разгледаме линейната конволюция на същите две  $N$ -точкови редици, чрез бързия метод, даден с формула (3.99). След прибавяне на необходимите нули всяка редица има дължина  $2N-1$  точки. Да приемем, че  $2N-1 \approx 2N$ , например за  $N \geq 8$ , и че се използва алгоритъмът за БПФ при основа 2. Тогава  $N$  е 2 на степен цяло число, т.е.  $N = 2^d$ , където  $d$  е цяло число. Броят на комплексните умножения за  $N$ -точковото БПФ е  $(N/2)\log_2 N$ , така че за  $2N$ -точково БПФ е  $(2N/2)\log_2 2N$  или  $N \log_2 2N$  комплексни умножения са необходими. Формула (3.99) изисква две ДПФ и едно обратно ДПФ. Обратното ДПФ ще бъде пресметнато като се използва модифицирането ДПФ – т.2.6. Поради това изчислителният процес като цяло изисква пресмятането на три  $2N$ -точкови БПФ, което включва  $3N \log_2 2N$  комплексни умножения. По-нататък, за всяка от  $2N$ -те стойности във формула (3.99) е необходимо да се пресметнат комплексните умножения  $X_1(k)X_2(k)$ . Така нараства броят на комплексните умножения до  $3N \log_2 2N + 2N$ . Сега, ако всяко комплексно умножение е от вида  $(A+jB)(C+jD)$ , то ще изисква четири реални умножения  $AC$ ,  $AD$ ,  $BC$  и  $BD$ . Следователно са необходими  $12N \log_2 2N + 8N$  реални умножения.

Директният метод изисква  $N^2$  реални умножения, докато методът на бързата конволюция изисква  $12N \log_2 2N + 8N$ . В табл. 3-1 е направено сравнение на броя на необходимите реални умножения за различни стойности на  $N$ .

Таблица 3-1. Брой на реалните умножения, необходими за пресмятане на конволюцията на две  $N$ -точкови редици

$N$	Директен метод	Бърза конволюция	Отношение бърз/директен
8	64	448	7
16	256	1088	4,25
32	1024	2560	2,5
64	4096	5888	1,4375
128	16384	13312	0,8125
256	65536	29696	0,4531
512	262144	65536	0,250
1024	1048576	143360	0,1367
2048	4194304	311296	0,0742

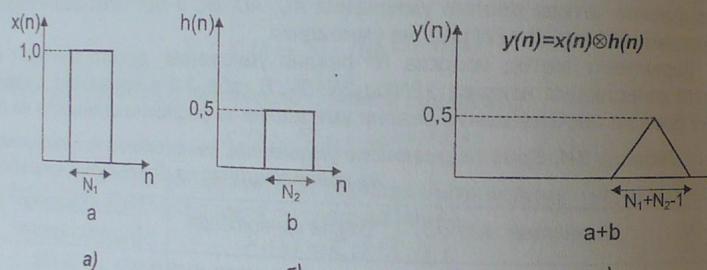
От нея се вижда, че бързата конволюция е по-бърза от директния метод за редици, които съдържат 128 точки и повече. Тогава, например, за редица от 1024 точки, ускорението е 10 пъти. Същото заключение може да се направи при сравнение на директната и бързата корелация.

### 3.3.5. Пресмятане на конволюция и корелация чрез секциониране

Досега предполагахме, че двете функции, с които се извършва конволюция (или корелация), имат крайна дължина. Възможно е да има и други случаи. Например, входният сигнал може да бъде разглеждан като безкрайно дълъг, било поради това, че е непрекъснат, или по-вероятното, защото наличната памет не е достатъчно голяма за да го запомни. В тези случаи е необходимо да се използват процедури, основани на разделяне на дългата редица на къси секции и пресмятане на частичните конволюции, от които се формира търсената линейна конволюция.

Съществуват два метода със секциониране на конволюцията: метод на припокриването със сумиране и метод на припокриването с натрупване. Първоначално тези методи ще бъдат въведени чрез разглеждане на случая, когато двете функции не започват в координатното начало.

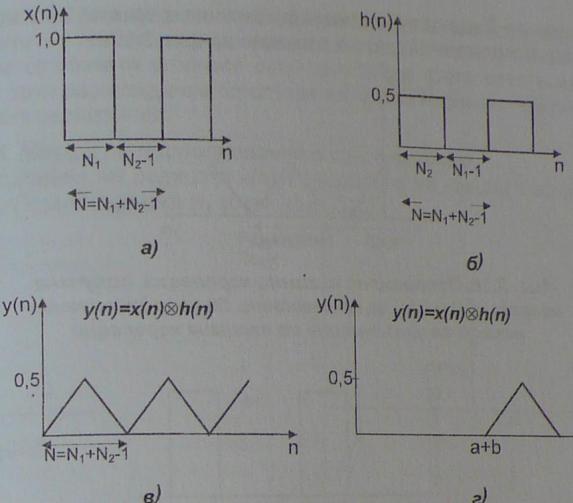
На фиг. 3.23 са показани двата дискретни сигнала  $x(n)$  и  $h(n)$  и тяхната конволюция  $y(n) = x(n) \otimes h(n)$ . Те започват съответно в дискретните моменти  $a$  и  $b$  и съдържат съответно  $N_1$  и  $N_2$  точки.



Фиг. 3.23. Конволюцията  $y(n)=x(n)\otimes h(n)$  на двата сигнала  $x(n)$  и  $h(n)$ , които не започват в координатното начало

При това положение ще се извършат значителен брой математически действия, които ще включват нулеви данни. Числото на тези пресмятания може да бъде намален, ако сигналите се преместят и те започнат от началото на координатната система – фиг. 3.24.

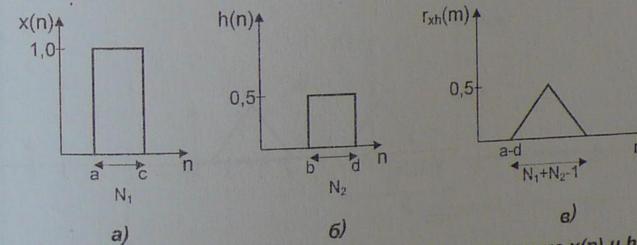
Допълнителни нули трябва тогава да бъдат прибавени към всеки сигнал, така че и двата да съдържат еднакъв брой точки  $N=N_1+N_2-1$ . Тяхната периодична конволюция съответства на линейната конволюция на двата сигнала. Конволюцията се извършва чрез прилагане на теоремата за конволюцията, формула (3.95) и алгоритъма за БПФ. Тогава точният резултат се получава чрез преместване на получената конволюция по дължината на  $n$ -оста, докато стигне до  $n=a+b$  – фиг. 3.24г. Тук се предполага, че  $N=2^d$ , където  $d$  е цяло число и следователно това е алгоритъм за БПФ при основа 2.



Фиг. 3.24. Конволюцията на сигналите от фиг. 3.23, получена чрез преместване на  $x(n)$  и  $h(n)$ , така че да започват от координатното начало

- Разширяване на  $x(n)$  чрез добавяне на  $N_2-1$  на брой нули;
- Разширяване на  $h(n)$  чрез добавяне на  $N_1-1$  на брой нули;
- Конволюцията  $y(n)=x(n)\otimes h(n)$ ;
- Точната линейна конволюция, получена чрез припълзване на  $y(n)$  по дължината на оста  $n$ , за да започне в момента  $n=a+b$

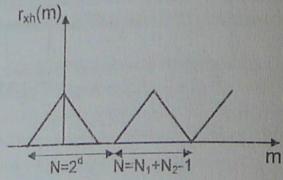
На фиг. 3.25 е показан подобен случай за пресмятане на корелацията  $r_{xh}(n)$  на сигналите  $x(n)$  и  $h(n)$ . Те се преместват, така че да започнат от координатното начало и се допълват чрез прибавяне на нули и тогава  $N=2^d \geq N_1+N_2-1$ . Сега е възможно да използваме теоремата за корелацията – формула (3.64).



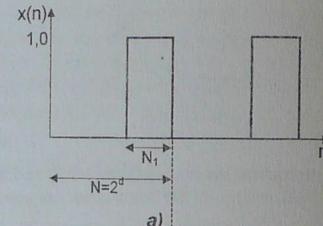
Фиг. 3.25. Взаимната корелация  $r(m)$  на двата сигнала  $x(n)$  и  $h(n)$ , които не започват в координатното начало а)  $x(n)$ ; б)  $h(n)$ ; в)  $r_{xh}(m)$

Получава се сигналът от фиг. 3.26. Той не е периодично копие на фиг. 3.25в, въпреки че е запазена първоначалната форма. Желаният периодичен

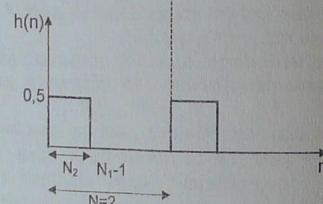
результат може да бъде получен, ако  $x(n)$  започне в точката  $n=N-N_1+1$ , докато  $h(n)$  започва в момента  $n=0$ , както е показано на фиг. 3.27.



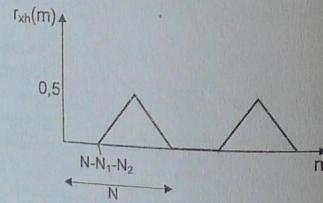
Фиг. 3.26. Неправилна взаимна корелация, получена когато  $x(n)$  и  $h(n)$  са преместени до координатното начало за извършване на взаимна корелация



a)



b)



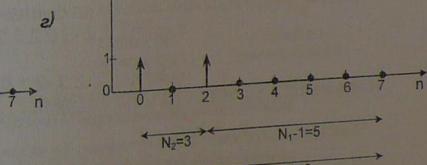
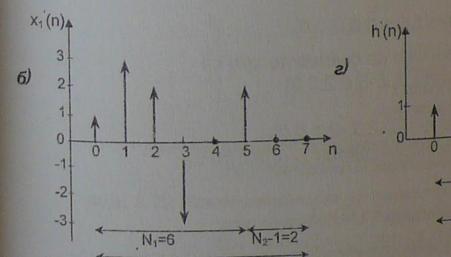
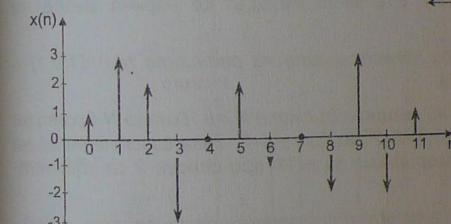
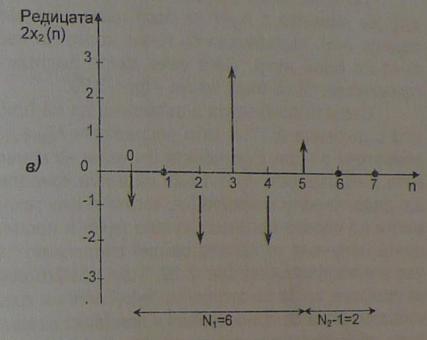
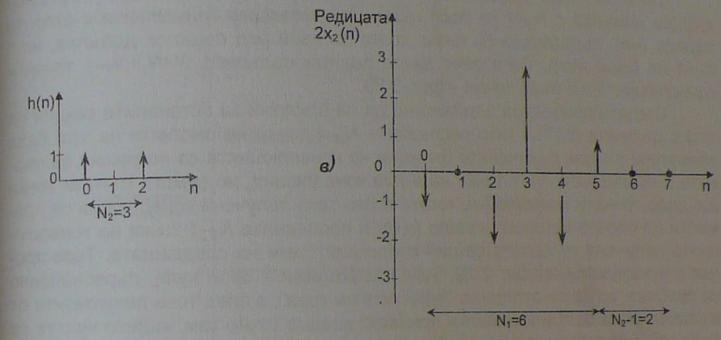
c)

Фиг. 3.27. Метод за получаване на точна взаимна корелация  
a)  $x(n)$  започва в моментта  $N-N_1+1$ ; b)  $h(n)$  започва в координатното начало;  
c) Резултатът е точният периодичен коефициент на взаимна корелация  $r_{xh}(m)$

На фиг. 3.27в е дадена необходимата периодична корелационна функция. Резултатът трябва да бъде преместен с  $a-d-N+N_1+N_2$  точки надясно, за да започне от точната стойност  $a-d$  – фиг. 3.28в. Сега вече е възможно да разширим тези разглеждания за случая на конволюция на безкрайна редица  $x(n)$  и крайна редица  $h(n)$ .

### 3.3.6. Метод на припокриването със сумиране

Да приемем, че редицата  $x(n)$  е разделена на секции с еднаква дължина, всяка от които съдържа  $N$  точки (фиг. 3.28).



Фиг. 3.28. Метод за конволюция чрез припокриване със сумиране

Сега да приемем, че те са периодични и с тях се извършва конволюция

с друга редица  $h(n)$ , която съдържа  $N_2$  точки. Втората редица е допълнена с  $N_1 - N_2$  на брой нули, така че и двете редици са периодични и имат дължина  $N_1$ . Резултатът от конволюцията ще бъде неточен, защото за да бъде коректен, всяка редица трябва да бъде дълга  $N=N_1+N_2-1$ . Обаче, всяка секция на  $x(n)$  има дължина  $N_1$  и не може да бъде увеличена. Проблемът може да бъде отстранен, ако секциите на  $x(n)$  имат дължина  $N$  и последните  $N_2-1$  на брой точки се заместват с нули, което ще доведе до нарастване на първата редица до  $N-N_2+1=N_1$  точки – фиг. 3.28.

По този начин редицата с  $N_1$  точки, която е секция на първата редица  $x(n)$ , се допълва с  $N_2-1$  на брой нули и се извършва конволюция с втората редица  $h(n)$ , съдържаща  $N_2$  точки, която на свой ред също се допълва, но с  $N_1-1$  на брой нули. Сега вече двете редици съдържат  $N=N_1+N_2-1$  точки и конволюцията ще бъде точна – фиг. 3.29.

Същата процедура е възможно да се приложи за останалите секции на  $x(n)$  с дължина  $N$ . Тъй като последните  $N_2-1$  точки на секциите на  $x(n)$  бъха замествени с нули, получените функции на конволюцията са погрешни за първите и последните  $N_2-1$  точки на всяка конволюция, но сумата от тези точки ще даде точната конволюция, когато всяка така получена конволюция се премести до своето истинско начало  $(a+b)$  и последните  $N_2-1$  точки на конволюцията получени от едната секция при покриват тези на следващата. Този процес е илюстриран на фиг. 3.29. Така необходимият брой нули, първоначално се прибавя, за да се отстранят "ефектите на края", а след това резултатите от конволюцията се при покриват и прибавят заедно точно там, където нули са били добавени към редицата  $N_1$ . Ето защо методът се нарича метод на при покриването със сумиране.

**Пример 3.8.** Да се намери конволюцията на редиците  $h(n)=\{1,0,1\}$  и  $x(n)=\{1,3,2,-3,0,2,-1,0,-2,3,-2,1,\dots\}$ .

**Решение.** Разделяме  $x(n)$  на секции с дължини  $N_1=6$ . Тогава  $N$ -броят на точките на ДПФ, е  $N_1+N_2-1=6+3-1=8=2^d$ , където  $d=3$ . Така изискванията на линейната конволюция и на алгоритъма за БПФ при основа 2 са удовлетворени.

Прибавяме нули към редицата  $h(n)$  и получаваме разширената редица  $h(n)$ :

$$h(n)=\{1,0,1,0,0,0,0,0\}.$$

Първите две разширени редици на секциите  $x(n)$  са

$$x_1(n)=\{1,3,2,-3,0,2,0,0\}$$

$$x_2(n)=\{-1,0,-2,3,-2,1,0,0\}.$$

Членовете на сумата на конволюцията  $x_1(n) \otimes h(n)$  са

$$y_{10}=h_0x_{10}'=1$$

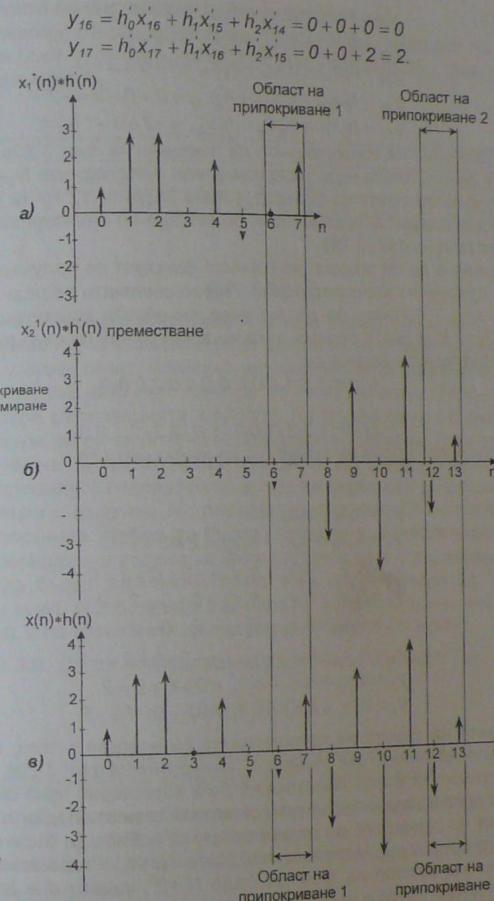
$$y_{11}=h_0x_{11}'+h_1x_{10}'=3+0=3$$

$$y_{12}=h_0x_{12}'+h_1x_{11}'+h_2x_{10}'=2+0+1=3$$

$$y_{13}=h_0x_{13}'+h_1x_{12}'+h_2x_{11}'=-3+0+3=0$$

$$y_{14}=h_0x_{14}'+h_1x_{13}'+h_2x_{12}'=0+0+2=2$$

$$y_{15}=h_0x_{15}'+h_1x_{14}'+h_2x_{13}'=2-0-3=-1$$



Резултатът за конволюцията чрез при покриване със сумиране и директната конволюция

**Фиг. 3.29. Равностойност на конволюцията чрез при покриване със сумиране и директната конволюция**

Членовете на сумата на конволюцията  $x_2(n) \otimes h(n)$  са

$$y_{20}=h_0x_{20}'=-1$$

$$y_{21}=h_0x_{21}'+h_1x_{20}'=0+0=0$$

$$y_{22}=h_0x_{22}'+h_1x_{21}'+h_2x_{20}'=-2+0-1=-3$$

$$\begin{aligned}
 y_{23} &= h_0 x_{23} + h_1 x_{22} + h_2 x_{21} = 3 + 0 - 2 = 1 \\
 y_{24} &= h_0 x_{24} + h_1 x_{23} + h_2 x_{22} = -2 + 0 - 2 = -4 \\
 y_{25} &= h_0 x_{25} + h_1 x_{24} + h_2 x_{23} = 1 + 0 + 3 = 4 \\
 y_{26} &= h_0 x_{26} + h_1 x_{25} + h_2 x_{24} = 0 + 0 - 2 = -2 \\
 y_{27} &= h_0 x_{27} + h_1 x_{26} + h_2 x_{25} = -2 + 0 + 1 = -1.
 \end{aligned}$$

Тези две суми на конволюциите са показани на фиг. 3.29a и фиг. 3.29b. Ако първите  $N_2-1=2$  точки на  $x_2$  се припокриват с последните  $N_2-1$  точки на  $x_1$  и сумите на конволюциите се съберат, тогава първите 12 точки на получния сигнал на конволюцията, пресметнати по метода на припокриване със сумиране, са показани на фиг. 3.29b.

Възможно е да се покаже, че горният резултат се получава, ако конволюцията се пресметне непосредствено. Първоначалната редица  $x(n)$  съдържа 12 точки, а  $h(n) = 3$  точки. За да получим линейната конволюция на двете прибавяме нули към двете редици, така че всяка от тях да съдържа  $12+3-1=14$  точки. Новополучените редици са:

$$h(n) = \{1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

и

$$x(n) = \{1, 3, 2, -3, 0, 2, -1, 0, -2, 3, -2, 1, 0, 0\}.$$

Първите девет члена на сумата на конволюцията са

$$\begin{aligned}
 y_0 &= h_0 x_0 = 1 \\
 y_1 &= h_0 x_1 + h_1 x_0 = 3 \\
 y_2 &= h_0 x_2 + h_1 x_1 + h_2 x_0 = 2 + 0 + 1 = 3 \\
 y_3 &= h_0 x_3 + h_1 x_2 + h_2 x_1 = -3 + 0 + 3 = 0 \\
 y_4 &= h_0 x_4 + h_1 x_3 + h_2 x_2 = 0 + 0 + 2 = 2 \\
 y_5 &= h_0 x_5 + h_1 x_4 + h_2 x_3 = 2 + 0 - 3 = -1 \\
 y_6 &= h_0 x_6 + h_1 x_5 + h_2 x_4 = -1 + 0 + 0 = -1 \\
 y_7 &= h_0 x_7 + h_1 x_6 + h_2 x_5 = 0 + 0 + 2 = 2 \\
 y_8 &= h_0 x_8 + h_1 x_7 + h_2 x_6 = -2 + 0 - 1 = -3
 \end{aligned}$$

Членовете на сумата на конволюцията са еднакви с тези, получени по метода на припокриването със сумиране, начертани на фиг. 3.29b.

Алгоритъмът за бърза конволюция (или корелация) чрез секциониране по метода на припокриването със сумиране се състои от следните стъпки.

- 1) Броят на точките  $N_1$  на редицата  $x(n)$  се избира да бъде от порядъка на точките  $N_2$  на редицата  $h(n)$ , като  $N_1 > N_2$ . Също така, избира се броят на точките на БПФ да бъде  $N_2=2^d$ , където  $d$  е цяло число и  $N > N_1 + N_2 - 1$ . Ако е необходимо, за да се удовлетворят тези условия, се прибавят нули към двете редици.
- 2) Преместват се така формирани редици на секциите на  $x(n)$  до координатното начало.
- 3) За всяка секция на разширената редица на  $x(n) - x(n)$  се извършва бързата конволюция  $x(n) \otimes h(n)$ , т.е. пресмята се  $X(k)H(k)$  и след това – неговото обратно преобразуване.
- 4) Извършва се последователно припокриване на получените частични конволюции на техните крайни и начални  $N_2-1$  стойности и след това се сумират.

### 3.3.7. Метод на припокриването с натрупване

Да разгледаме отново конволюцията  $x(n) \otimes h(n)$ , показана на фиг. 3.30, където  $N_2-1$  на брой нули бяха прибавени към редицата  $h(n)$ , така че и двете редици имат дължина  $N_1$ .

N <sub>1</sub> точки												N <sub>2</sub> -1 липсващи нули			
x <sub>0</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	...	...	...	x <sub>N-1</sub>	x <sub>N</sub>	0	0
h <sub>2</sub>	h <sub>1</sub>	h <sub>0</sub>	0	0	0	0	0	0	...	...	...	0	0	0	0

N<sub>2</sub> точки

Фиг. 3.30

Сумата на линейната конволюция на тези редици може да бъде получена чрез последователно извършване на следните операции: припълзване на  $h(n)$  надясно с един отчет, взаимно умножение на съответните членове и сумиране. Обаче, тъй като нито една от тях няма дължина  $N_1+N_2-1$ , резултът няма да бъде конволюцията  $x(n) \otimes h(n)$ . На редицата  $x(n)$  с дължина  $N_1$  трябват  $N_2-1$  нули, за да се получи необходимата дължина. Това означава, че първите  $N_2-1$  члена на сумата на конволюцията ще бъдат неточни и би трявало да се отстранят. Следователно, ако данните на  $x(n)$  се разделят на допирани се секции с дължина  $N_1$ , първите  $N_2-1$  стойности на всяка частична сума на конволюцията трябва да бъдат отстранени. Конволюцията  $x(n) \otimes h(n)$  ще съдържа периодична редица на липсващите данни с дължина  $N_2-1$ . Тези данни могат да бъдат запълнени точно чрез припокриване на последните  $N_2-1$  данни на всяка  $x(n)$  редица с дължина  $N_1$ , с първите  $N_2-1$  данни на следващата редица, и по този начин да се отстрани тези  $N_2-1$  данни.

**Пример 3.9.** Да се намери конволюцията на същите две редици от т. 3.3.6

$$h(n) = \{1, 0, 1\}$$

и

$$x(n) = \{1, 3, 2, -3, 0, 2, -1, 0, -2, 3, -2, 1\}$$

като използвате метода на припокриването с натрупване.

**Решение.** Тъй като редицата  $h(n)$  има дължина  $N_2=3$ , дължината на припокриването е  $N_2-1=2$ . Припокриването на секциите е показано на фиг. 3.31. Конволюциите се пресмятат за всяка секция, както следва.

h(n)	1	0	1										
x(n)	1	3	2	-3	0	2	-1	0	-2	3	-2	1	
Секция1	1	3	2	-3									
Секция2		2	-3	0	2								
Секция3				0	2	-1	0						
Секция4					-1	0		-2	3				
Секция5						-2	3	-2	1				

Фиг. 3.31. Припокриване на секциите при метода за конволюция с натрупване

За секция 1

$$y_{10} = h_0 x_{10} = 1$$

$$y_{11} = h_0 x_{11} + h_1 x_{10} = 3 + 0 = 3$$

$$y_{12} = h_0 x_{12} + h_1 x_{11} + h_2 x_{10} = 2 + 0 + 1 = 3$$

$$y_{13} = h_0 x_{13} + h_1 x_{12} + h_2 x_{11} + h_3 x_{10} = -3 + 0 + 3 + 0 = 0$$

Следователно

$$y_1 = \{1, 3, 3, 0\}$$

Напомняме, че за останалите секции  $h_1=h_3=0$ . За секция 2 получаваме

$$y_{20} = h_0 x_{20} = 2$$

$$y_{21} = h_0 x_{21} = -3$$

$$y_{22} = h_0 x_{22} + h_2 x_{20} = 2 + 0 = 2$$

$$y_{23} = h_0 x_{23} + h_2 x_{21} = 2 - 3 = -1$$

Следователно

$$y_2 = \{2, -3, 2, -1\}$$

По подобен начин, за секция 3,

$$y_3 = \{0, 2, -1, 2\}$$

За секция 4,

$$y_4 = \{-1, 0, -3, 3\}$$

и накрая, за секция 5,

$$y_5 = \{-2, 3, -4, 4\}$$

Тези резултати са дадени в табл. 3-2, откъдето се вижда, че първите  $N_2-1$  резултати на всяка редица се отстраняват. Последният ред на таблицата, като изключим първите  $N_2-1$  точки, съответства на точната конволюция.

Таблица 3-2. Резултати от Пример 3.9

Секция1	$y_0$	1 3	3 0			
Секция2	$y_1$		2 3	2 -1		
Секция3	$y_2$			0 2	-1 2	
Секция4	$y_3$				-1 0	-3 3
Секция5	$y_4$				-2 3	-4 4
$x(n) * h(n)$		1 3	3 0	2 -1	-1 2	-3 3 -4 4

Алгоритъмът за бърза конволюция чрез секциониране по метода на припокриване с натрупване се състои от следните стъпки:

- 1) Избира се броят на точките  $N_1=2^d$  на редицата  $x(n)$ , с която заедно с  $h(n)$  ще се извърши конволюцията. Към редицата  $h(n)$  се прибавят  $N_2-1$  нули, така че двете редици имат вече дължина  $N_1$ .
- 2) Двете редици се преместват, така че да започнат от координатното начало.
- 3) За всяка редица се пресмятат съответните стойности на  $X(k)$  и  $H(k)$  като се използва алгоритъмът за БПФ.
- 4) Пресмята се произведението  $X(k)H(k)$  и обратното му ДПФ, което е конволюцията на всяка редица с  $h(n)$ .
- 5) Премества се всяка от конволюциите, така че да припокрие предшестващата с  $N_2-1$  данни.

6) Отстраняват се първите  $N_2-1$  данни от всяка конволюция и се записват останалите стойности, съответстващи на точната конволюция.

### 3.3.8. Изчислителни предимства на бързата конволюция чрез секциониране

В т.3.3.5 беше показано, че излишни изчислителни трудности могат да бъдат спестени, ако всяка секция на сигнала, с който ще се извърши конволюцията, се премести в координатното начало. Другото допускане е, че изискванията по отношение на изчисленията са сходни за двата метода – методът на припокриването със сумиране и методът на припокриването с натрупване, така че е достатъчно да разгледаме само първия метод. Приемаме, че редицата  $x(n)$  с дължина  $N$  е разделена на  $N/N_1$  секции, всяка с дължина  $N_1$ , редицата  $h(n)$  има дължина  $N_2$  и че дължините на редиците, с които ще се извърши линейна конволюция са  $N'=2^d \geq N_1+N_2-1$ . В т.3.3.4 беше показано, че за извършване на бърза конволюция на две  $N'$ -точкови редици са необходими  $12N' \log_2 N' + 8N'$  реални умножения. Следователно, за да се извърши бърза конволюция на  $N$ -точковата редица  $x(n)$  по метода на припокриването със сумиране ще бъдат необходими  $(N/N_1)(12N' \log_2 2N' + 8N') = R_m(s)$  реални умножения. Това показва, че дължините на редиците, с които се извърши конволюцията –  $N'$  би трябвало да бъдат къси, докато дължините  $N_1$  на секциите на  $x(n)$  достигат  $N'$ . В идеалния случай  $N'=2^d=N_1+N_2-1$ . Броят на реалните умножения за първоначалната  $N$ -точкова редица е  $12N \log_2 2N + 8N = R_m(N)$ . От табл. 3.3 се вижда, че за примера от т.3.3.6 отношението  $R_m(s)/R_m(N) \leq 1$  е типично, а спестеното време за изчисления от порядъка на 50% е напълно възможно.

### 3.3.9. Връзка между конволюция и корелация

Стойността на  $n$ -тия отчет на изходния сигнал при конволюцията се определя от сумата на конволюцията, дефинирана с формула (3.80):

$$y(n) = \sum_{m=0}^n h(m)x(n-m) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(n)x(0). \quad (3.101)$$

Стойността на функцията на взаимната корелация за сигналите  $h(n)$  и  $x(n)$ , когато закъснението е в дискретни единици, се дефинира с формула (3.1), където са сменени само означенията

$$\begin{aligned} r_{hx}(j) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)x(j+n) = \\ &= \frac{1}{N} [h(0)x(j) + h(1)x(j+1) + \dots + h(N-1)x(j+N-1)]. \end{aligned} \quad (3.102)$$

По-лесно е да се сравнят  $y(n)$  и  $r_{hx}(j)$ , ако  $j=0$ , т.е. когато се разглежда случаят на взаимна корелация при нулево закъснение. Формула (3.102) ще се видоизмени по следния начин

$$\begin{aligned} r_{hx}(0) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)x(n) = \\ &= \frac{1}{N} [h(0)x(0) + h(1)x(1) + \dots + h(N-1)x(N-1)]. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Сравнението на (3.101) и (3.103) показва, че те са много близки с изключение на това, че при взаимната корелация редицата  $x(n)$  е в обратен ред на този при конволюцията. Следователно, конволюцията е равна на взаимната корелация на двета сигнала, при което едната от първоначалните редици е

била обрната във времето и нормиращият множител  $1/N$  е заместен с единица. Това означава, че конволюцията и корелацията могат да бъдат предизвикани с една и съща програма, като просто една от редиците се обрне.

### 3.4. Реализиране на корелация и конволюция

Тук отново ще напомним, че има много близка връзка между двете операции – корелация и конволюция. И в двата случая участват две редици от данни, при което данните на едната от тях трябва да бъдат обрнати. Освен това, за по-дългата редица операциите могат да бъдат ускорени, ако се използват методите на БПФ с цел да се получи бърза корелация или бърза конволюция. Там където едната от редиците е много дълга, може да се използва методът на припокриването със сумиране или методът на припокриването с натрупване (вж. т. 3.3.6 и 3.3.7).

Конволюцията или корелацията могат да бъдат реализирани като се използва, например, КИХ филтър, реализиран с БПФ. Корелацията или конволюцията могат също да бъдат реализирани като се използва съгласуващ филтър, както е показано в т. 3.2.2, където е илюстриран корелационният детектор от фиг. 3.12. С помощта на технологията "прибори с пренасяне на задържа" може да бъде реализиран трансверзален филтър за цифрова обработка. Такъв тип филтър има линейна фазова характеристика при скорост на обработка на данните 100MHz и се реализира като закъснителна линия. Подобна обработка на данни може да бъде извършена от секционирани закъснителни линии, при които се използват прибори тип "повърхностна акустична вълна". Тези линии работят в интервала от 2MHz до 2GHz. При други реализации се използват специално проектирани за целта чипове на конволюции и корелатори, цифрови сигнални процесори с общо предназначение, стандартни микропроцесори и транспютри.

Да разгледаме конволюцията на редиците  $x(n)$  и  $h(n)$ . Когато изчисляваме  $X(k)$ , използваме реалната част на БПФ, която съдържа четните членове на  $x(n)$  и имагинерната част, която съдържа нечетните членове, получени чрез разположаване на дължината на БПФ. Реалната част на  $(1/N)F_D^{-1}[X(k)H(k)]$  тогава дава четните членове на необходимата конволюция, а имагинерната част – нечетните членове.

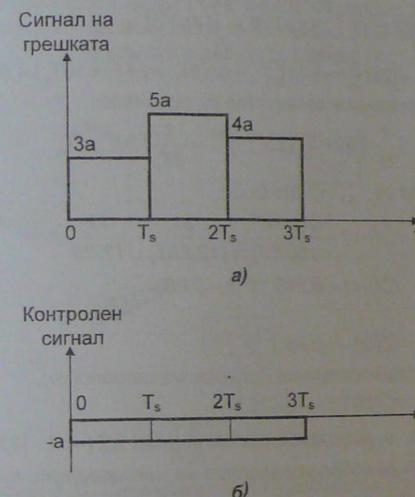
По подобен начин, конволюцията на двете редици  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  с  $h(n)$  може да бъде изчислена едновременно. Реалната част на БПФ е преобразуването на редицата  $x_1(n)$ , а имагинерната част – на редицата  $x_2(n)$  и в резултат се получава  $X'(k)$ . Тогава реалната част на  $(1/N)F_D^{-1}[X'(k)H(k)]$  е  $x_1(n) \otimes h(n)$ , а имагинерната част е  $x_2(n) \otimes h(n)$ .

### 3.5. Примери за приложение

#### 3.5.1. Корелация

**Пример 3.10.** В този прост пример се разглежда приложението на корелацията за управлението на положението на спътник, за да се гарантира, че слънчевият панел винаги ще бъде насочен към слънцето. Грешките от неправилното положение са представени като импулси с различни нива, които се различават със стойност  $a=0,2mV$ , а широчината на импулсите е  $T_s=1\mu s$ . Грешката при промяна на положението спрямо първоначалното положение се управлява чрез изпращане на редица от отрицателни

импулси с височина  $a$ , когато грешката е положителна. Системата за управление е удовлетворена, ако коефициентът на корелация между грешката и управляващите сигнали е по-голям от  $-0,5$ . На фиг. 3.32a са показани три импулса на грешката, а на фиг. 3.32b – съответните управляващи импулси. За този пример се предполага, че тези импулси са достатъчни и че не е необходимо да се разглежда закъснение по-голямо от  $T_s$ . Задачата е да се определи дали системата може да се разглежда като удовлетворена или не.



Фиг. 3.32. Управление на положението на космически кораб  
а) Сигнал на грешката; б) Контролен сигнал

Системата е удовлетворена, ако се докаже, че  $|r_{12}(\tau)| > 0,5$  за  $0 \leq \tau \leq T_s$ . Взаимната корелация може да бъде извършена, ако управляващият сигнал бъде преместен надясно, докато сигналът на грешката остане непроменен. По този начин бихме определили  $r_{12}(-\tau)$ .

Сега

$$r_{12}(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(t)v_2(t-\tau)dt,$$

където  $v_1(t)$  е сигналът на грешката, а  $v_2(t)$  е управляващият сигнал.

$$\begin{aligned} r_{12}(-\tau) &= \frac{1}{3T_s} \int_{-\tau}^{T_s} 3a(-a)dt + \frac{1}{3T_s} \int_{T_s}^{2T_s} 5a(-a)dt + \frac{1}{3T_s} \int_{2T_s}^{3T_s} 4a(-a)dt = \\ &= \frac{a^2}{3T_s} \left\{ [-3t]_{-\tau}^{T_s} + [-5t]_{T_s}^{2T_s} + [-4t]_{2T_s}^{3T_s} \right\} = \frac{a^2}{3T_s} (-3T_s + 3\tau - 10T_s + 5T_s - 12T_s + 8T_s) = \\ &= \frac{a^2}{3T_s} (-12T_s + 3\tau). \end{aligned}$$

Стойността на  $r_{12}(\tau)$  трябва да бъде нормирана чрез разделяне на нормиращия множител

$$\frac{1}{3T_s} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} v_1^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} v_2^2(t) dt \right]^{1/2},$$

за да се ограничи в интервала  $-1 < r_{12}(\tau) < 1$ .

Сега

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} v_1^2(t) dt &= \int_0^{T_s} (3a)^2 dt + \int_{T_s}^{2T_s} (5a)^2 dt + \int_{2T_s}^{3T_s} (4a)^2 dt = \\ &= a^2 \left\{ [9t]_0^{T_s} + [25t]_{T_s}^{2T_s} + [16t]_{2T_s}^{3T_s} \right\} = a^2 (9T_s + 25T_s + 16T_s) = 50a^2 T_s. \end{aligned}$$

Оттук за нормиращия множител се получава

$$\frac{1}{3T_s} [(50a^2 T_s)(3a^2 T_s)]^{1/2} = \frac{1}{3T_s} 150^{1/2} a^2 T_s$$

и нормираният израз за  $r_{12}(-\tau)$  ще бъде

$$r_{12}^N(-\tau) = \frac{3\tau - 12T_s}{150^{1/2} T_s} = \frac{3\tau}{12,25T_s} - \frac{12}{12,25},$$

$$r_{12}^N(-\tau) = 0,245 \cdot 10^6 \tau - 0,98.$$

Когато  $\tau=0$ ,

$$r_{12}^N(0) = -0,98.$$

Когато  $\tau=1\mu s$  (най-голямата допустима стойност),

$$r_{12}^N(10^{-6}) = -0,735.$$

Следователно, в разглеждания интервал  $|r_{12}^N(-\tau)| > 0,5$ , което удовлетворява критерия за добро управление на положението на спътника.

**Пример 3.11.** Предназначението на сонарната система е за определяне на разстоянието до източника на звук. Сигналът е широколентов и гаусов с нулева средна стойност. Системата се състои от два хидроакустични преобразувателя, които се намират на разстояние  $d$  един от друг, и са свързани със система за обработка на сигнала. Преобразувателите  $T_1$  и  $T_2$  получават широколентовите зашумени сигнали, съответно  $q_1(t)$  и  $q_2(t) = Aq_1(t + \Delta t)$ . С  $\Delta t$  означаваме времето за закъснение, което се дължи на различното разстояние от източника до двата преобразувателя.  $A$  е коефициентът на затихване. В този случай приемаме  $A=1$ . Системата за обработка на сигнали пресмята корелационната функция на изходните сигнали на двата преобразувателя, които имат еднаква дължина.

Да се начертаят блоковата схема на проста система, проектирана да пресмята корелацията за възможно най-малко време и да се обясни принципът, на който се основава.

Да се начертаят изходните сигнали на преобразувателите и тяхната взаимна корелационна функция като се посочат нейните особености.

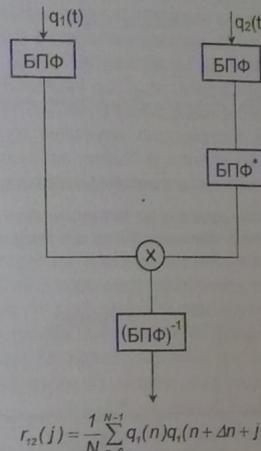
Ако пиковата стойност на взаимната корелационна функция е  $10$  и приемника има широчина на лентата  $1 \div 10 Hz$ , пресметнете енергията на приемния сигнал.

**Решение.** Блоковата схема е показана на фиг. 3.33. Тази система ус-

корява пресмятането на корелацията при тази блокова схема чрез прилагане на теоремата за корелацията и използване на БПФ. Изчислението ще се ускорят значително в сравнение с непосредственото пресмятане на корелацията, когато числото на точките в редиците е по-голям от 128.

Системата пресмята  $r_{12}(\tau)$  по формулата

$$r_{12}(j) = F_D^{-1}[F_1(k)F_2^*(k)].$$



Фиг. 3.33. Блок-схема на хидролокатор (сонар)

Изходният сигнал  $r_{12}(j)$  е

$$r_{12}(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} q_1(n)Aq_2(n + \Delta n + j).$$

Тъй като  $q_1(n)$  и  $q_2(n)$  са случайните сигнали, системата ще произведе забележим изходен сигнал само, когато сигналите на входа са преместени един спрямо друг, така че да бъдат във фаза. Това ще се случи, когато  $j = -\Delta n$ . Тогава изходният сигнал е

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} q_1^2(n) = P_{AV}, \text{ средна мощност.}$$

На фиг. 3.34 и 3.35 са показани сигналите и функцията на взаимната корелация.

Взаимната корелация на двата сигнала е

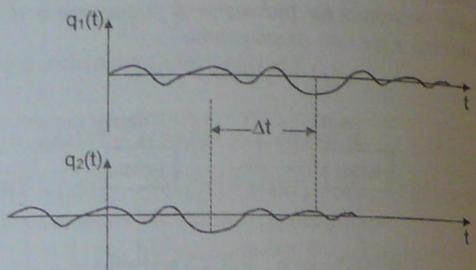
$$r_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q_1(t)q_2(t + \tau)dt.$$

След заместване на  $q_2(t)$  се получава

$$r_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q_1(t)Aq_1(t + \Delta t + \tau)dt,$$

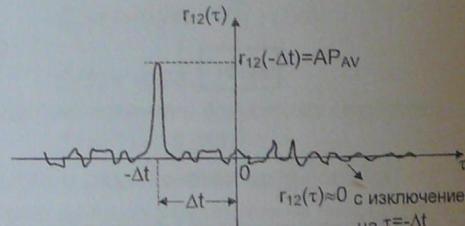
което може да бъде записано още така

$$r_{12}(\tau) = \frac{A}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} q_1(t) A q_2(t + \tau') dt, \quad \text{където} \quad \tau' = \Delta t + \tau.$$



$\Delta t$  – времето за закъснение между двата преобразувателя

Фиг. 3.34. Разширяване на честотната лента на шумови сигнали, детектиирани от хидролокатора



Фиг. 3.35. Функцията на взаимна корелация на сигналите, детектиирани от хидролокатора

Подинтегралната функция е равностойна на стойността на корелацията на  $q_1(t)$  при нулево закъснение и следователно представя мощността на този сигнал –  $P_{AV}$ . Тогава

$$r_{12}(\tau) = AP_{AV} \delta(t + \Delta t),$$

където  $\delta$  означава делта функцията. Стойността на  $r_{12}(\tau)$  е  $AP_{AV} = 10$ .

Възможно е да намерим енергията на приемния сигнал в необходима честотна лента като първо приложим теоремата на Винер-Хинчин, да получим спектралната плътност на енергията.

Теоремата е

$$G_E(f) = F_D[r_{12}(\tau)] = F_D[AP_{AV} \delta(t + \Delta t)] = AP_{AV} \theta^{j_{int}}.$$

Тогава  $|G_E(f)| = AP_{AV} = 10 \text{ J Hz}^{-1}$ . Широчината на лентата на сигнал  $(10-1) \text{ Hz} = 9 \text{ Hz}$ . Следователно енергията на приемния сигнал е  $10.9 = 90$ .

### 3.5.2. Конволюция

#### 3.5.2.1. КИХ и БИХ филтри

Действието на трансверзалните филтри от двата вида – КИХ и БИХ, представлява добър пример за конволюция.

Да разгледаме линейната инвариантна във времето (ЛИВ) система, която се описва с диференчното уравнение

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^L b_k x(n-k), \quad (3.104)$$

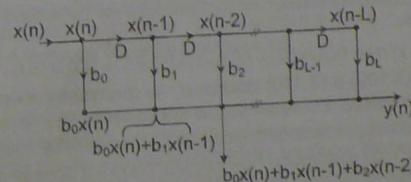
където  $y(n)$  е редицата на изходния сигнал, а  $x(n)$  – входната редица. Изходният сигнал е линейна комбинация от текущия входен сигнал и стойностите на входния и изходния сигнал в минали моменти.  $a_k$  и  $b_k$  са реални константи,  $N$  е редът на уравнението и представлява броят на отчетите на изходния сигнал в  $N$  минали момента, които трябва да бъдат взети предвид.

Тъй като изходният сигнал в настоящия момент зависи от отчетите на изходния сигнал в минали моменти, системата е рекурсивна. Ако изходният сигнал зависи само от входния сигнал в минали моменти, тази система се нарича нерекурсивна и се описва с уравнението

$$y(n) = \sum_{k=0}^L b_k x(n-k), \quad (3.105)$$

което е математичен модул на трансверзален филтър (или закъснителна линия с изводи). На фиг. 3.36 е дадена структурната схема на системата (3.105). Изходният сигнал е сума от закъснелите стойности на входния сигнал, умножени със съответните теглови коефициенти. Сега ще покажем, че тези тегла съответстват на импулсната характеристика на системата. Да приемем, че входният сигнал  $x(n)$  е единичният импулс  $\delta(n)$ , където

$$x(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{за } n = 0, \text{ т.e. } x(0) = 1 \\ 0 & \text{за } n \neq 0, \text{ т.e. } x(n \neq 0) = 0. \end{cases}$$



Фиг. 3.36. Структурна схема на нерекурсивен филтър

Съответният изходен сигнал е импулсната характеристика  $h(n)$ . Заместването на последователните стойности на входния сигнал в (3.105) дава

$$\begin{aligned} y(0) &= h(0) = b_0 x(0) + b_1 0 = b_0 \cdot 1 = b_0, \\ y(1) &= h(1) = b_0 \cdot 0 + b_1 x(0) + b_2 0 = b_1 \cdot 1 = b_1, \end{aligned}$$

$$y(L) = h(L) = b_0 \cdot 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + b_L \cdot 1 = b_L.$$

Следователно

$$h(n) = \{b_0, b_1, \dots, b_L\}, \quad (3.106)$$

което показва, че коефициентите на предаване (теглата) в структурната схема на системата съответстват на коефициентите на импулсната характеристика. Такива системи се наричат филтри с крайна импулсна характеристика (КИХ).

Сега да разгледаме изходния сигнал, който съответства на входната редица  $x(n)$ , зададена в общия случай. След заместване на последователните стойности в (3.105) се получава

$$\begin{aligned} y(n) &= b_0 x(0) + b_1 x(n-1) + \dots + b_n x(0) = \\ &= h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(n)x(0), \end{aligned} \quad (3.107)$$

което представлява конволюцията на входния и изходния сигнал, както би трябвало да се очаква. Следователно КИХ-филтрите могат да се разглеждат като конволвери, в които теглата на структурната схема на филтера съответстват на коефициентите на неговата импулсна характеристика.

Да разгледаме рекурсивния филтер от първи ред, описан с уравнението

$$y(n) = a_1 y(n-1) + b_0 x(n). \quad (3.108)$$

Ако на входа му се подаде единичен импулс, изходният сигнал ще бъде

$$y(n) = h(n) = b_0 a_1^n, \quad n \geq 0. \quad (3.109)$$

Ако входният сигнал е редицата  $x(n)$  и се предполага, че  $y(-1)=0$ , тогава

$$\begin{aligned} y(0) &= b_0 x(0) \\ y(1) &= a_1 b_0 x(0) + b_0 x(1) \\ y(2) &= a_1^2 b_0 x(0) + a_1 b_0 x(1) + b_0 x(2) \end{aligned}$$

$$y(n) = a_1^n b_0 x(0) + a_1^{n-1} b_0 x(1) + \dots + a_1 b_0 x(n-1) + b_0 x(n).$$

След заместване на известните стойности на тегловите коефициенти от (3.109) се получава

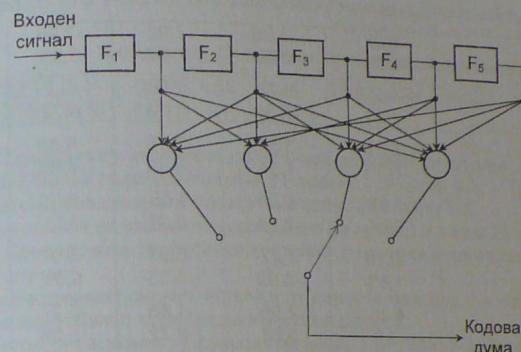
$$y(n) = h(n)x(0) + h(n-1)x(1) + \dots + h(0)x(n). \quad (3.110)$$

Формулите (3.109) и (3.110) показват, че филтерът с безкрайна импулсна характеристика (БИХ) от първи ред е конволвер, на който коефициентите на импулсната характеристика се определят с формулата  $h(n) = b_0 x_1^n$ .

КИХ-филтрите се използват при обработката на речеви сигнали с цел да се намали широчината на лентата при импулсно-кодовата модулация, в кодерите за поддиапазоните, за параметричен спектрален анализ и в линейните предсказващи вокодери. КИХ-филтрите намират приложение също така в радиолокаторите и за разширяване на спектъра в комуникациите.

### 3.5.2.2. Конволюционно кодиране

Конволюционните кодове дават възможност да се извърши корекция на пакет от грешки чрез разпределение на четността на контролните разреди на кода за дълга редица от символи. Изходите на тригерите на премествания регистър закъсняват един спрямо друг и изводите им чрез подходящо комбиниране формират суматори по модул 2. Така генерираните числа на изходите на суматорите се четат последователно за всеки тактов импулс – фиг. 3.37. Системата е по принцип каузална и нерекурсивна и произвежда изходен сигнал, който зависи от предните отчети на входния сигнал и извършва конволюция на новите входни отчети с отчетите на импулсната характеристика.



Фиг. 3.37. Конволюционен кодер

### 3.5.2.3. Деконволюция

В резултат на конволюцията между входния сигнал и импулсната характеристика на системата може да се получи изкривяване на изходния сигнал. Това се случва, например, в системите за комуникация и по тази причина може да е необходимо проектирането на коректор, който представлява линеен филтер, предназначен да извърши деконволюция на изходния сигнал, получен при конволюцията. Импулсната характеристика на системата трябва да бъде измерена (идентификация на системата) преди проектирането на филтера за деконволюция. Проблемът за идентификацията и деконволюцията е тъврде обширен и няма да бъде разглеждан тук.

### 3.5.2.4. Речеви сигнали

Анализът и кодирането на речеви сигнали за такива цели като взаимодействието човек-машина и компресия на данни е от голям интерес. Онова, което най-често се прави е речевият сигнал да бъде моделиран като конволюция на редица от импулси, представляващи основни тонове и импулсната характеристика на речевия тракт. Резултатът от трикратната конволюция може лесно да бъде преобразуван във вид, удобен за обработка с ЛИВ система.

Използването на КИХ-филтри при обработката на речеви сигнали беше разгледано в т. 3.5.2.1.

### ЗАДАЧИ

3.1. Направени са два отделни записи на периодична импулсна редица с еднаква дължина, която се предава по зашумен канал. В табл. 3-3 са дадени записаните стойности на отчетите на напрежението.

- а) Определете големината на закъснението между двата записи и периода на сигнала.  
б) Намерете периодичния сигнал.

Таблица 3-3

	Запис 1	6,02	-5,98	7,92	-7,96	-0,78
	Запис 2	8,93	-7,20	-0,82	3,23	1,44
		-8,34	9,22	-2,65	-3,7	9,51
		5,43	-9,88	-1,13	0,79	9,83
		5,53	3,50	-3,18	-8,85	8,21
		-8,73	4,64	-8,49	-4,66	-8,84
		1,69	-0,06	6,65	-8,00	-9,21
		5,55	-8,24	-0,37	2,71	4,63
		-0,78	7,27	-5,98	-3,97	9,11
		1,88	-0,92	-5,33	9,01	9,23
		4,23	2,99	-1,85	-5,27	3,81
		-3,7	5,08	-0,72	-5,08	-2,6
		6,62	-2,64	2,08	-5,91	-3,58
		9,67	-8,55	-3,08	4,18	8,11
		-1,65	3,64	-8,19	-3,50	4,84
		0,74	-3,87	-4,09	8,03	6,91
		5,25	2,93	-4,42	-8,21	3,61
		-9,87	-3,62	-8,29	-5,8	-7,04

3.2. Пресметнете функцията на взаимната корелация на сигналите 1 и 2 от табл. 3-3 с и без корекция на "ефекта на края". Изчислете грешките, които се дължат на този ефект.

3.3. Колко е корелацията в проценти между сигналите 1 и 2 от табл. 3-3 при нулево закъснение? Приемете, че тази величина се дефинира като коефициентът на корелация  $p_{12}$  се умножи със 100%.

3.4. Дискретните отчети на напрежението на зашумен сигнал са дадени в табл. 3-4. Използвайте метода на взаимната корелация с еталонен сигнал, за да намерите точната форма на съществуващия периодичен сигнал. Проведете вашето заключение като използвате друг метод.

3.5. Пресметнете автокорелационната функция на периодичния сигнал от задача 3.4а числено и 3.4б – аналитично. Сравнете тези две решения, а та-ка също с автокорелационната функция на зашумения сигнал. Обяснете всяко несъответствие с очаквания резултат.

Таблица 3-4. Отчети на дискретизираното напрежение, получени от зашумен сигнал

-7,37	-7,99	3,31	-8,59	-1,68	3,01	12,21	-2,38	7,46
-9,84	1,48	1,1	-1,8	5,48	8,93	0	-9,36	-10,11
1,61	3,36	-4,86	6,27					

3.6. Напрежение е дискретизирано и цифровизирано. Отчетите на цифровизираното напрежение са дадени в табл. 3-5. Определете дали сигналът може да бъде разглеждан като случаен. Направете оценка на периодичния сигнал и го начертайте, като приемете, че интервалът на дискретизиране е

1ms, а периодът на участващите компоненти на периодичния сигнал имат период 4ms.

Таблица 3-5. Стойности на цифровизираното напрежение

-0,92	-3,71	3,11	-0,24	4,65	0,84	-2,98	-3,94	-4,03	-2,51	0,17
3,85	2,58	0,38	4,58	3,4	-3,46					

3.7. Сравнете отношението сигнал/шум за следните случаи

- а) зашумения периодичен сигнал на запис 1 от табл. 3-3.
- б) автокорелационната функция на запис 2 от табл. 3-3.
- в) функцията на взаимната корелация на запис 1 и запис 2 от табл. 3-3.

3.8. Пресметнете теоретичната стойност на отношението сигнал/шум за следните случаи

- а) периодичният сигнал, получен от данните на запис 1 – табл. 3-3, чрез взаимната корелация с подходяща импулсна редица.
- б) автокорелационната функция на запис 1 от табл. 3-3, за случаите:

I. отношението сигнал/шум  $(S/N)_{\text{ro}}$  на автокорелационната функция на зашумен синусоидален сигнал е

$$(S/N)_{\text{ro}} = \frac{N}{1 + 8 \left( \frac{S_i}{N_i} \right) + 2 \left( \frac{S_i}{N_i} \right)^2},$$

където  $N$  е броят на отчетите,  $S_i$  е мощността на сигнала, а  $N_i$  е мощността на шума.

II. отношението сигнал/шум  $(S/N)_{\delta}$  на взаимната корелация на зашумен синусоидален сигнал с периодична импулсна редица, която има същия период като сигнала е

$$(S/N)_{\delta} = \frac{N}{1 + 1 \left( \frac{S_i}{N_i} \right)}.$$

3.9. Съгласуващ филтър има импулсна характеристика  $h(t) = \{1, -1, -1, 1, 1, -1, 1\}$  и е използван за детектиране на пристигащ в приемника кореспондентски сигнал, предаван през зашумен канал. В табл. 3-6 са дадени стойностите на дискретния сигнал, всяка от които представлява стойността на импулса в биполярната импулсна редица с амплитуда  $\pm 1,5V$  и широчина на импулса  $1\mu s$ . Определете времето на пристигане на сигнала и стойността на константата на съгласуващия филтър.

Таблица 3-6. Дискретни на напрежението, получени от зашумен биполярен сигнал

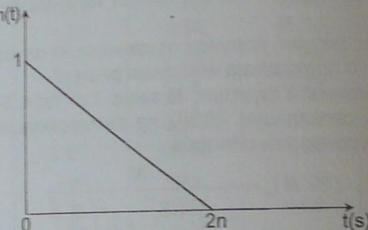
$t (\mu s)$	0	1	2	3	4	5	6
Амплитуда (V)	0,14	0,48	1,61	2,09	-2,40	0,40	2,35
$t (\mu s)$	7	8	9	10	11	12	13
Амплитуда (V)	-0,59	-1,18	0,32	-0,47	1,81	-1,63	-2,28

3.10. Намерете импулсната характеристика на система, ако реакцията ѝ при въздействие на входа с псевдошумовата редица  $\{1,1,-1,1,-1,-1,1,-1\}$  е  $y(n) = \{0,0;0,5;1,5;1,5;1,-1;-1,-1,-1,5;-0,5;-0,5;-0,5\}$ .

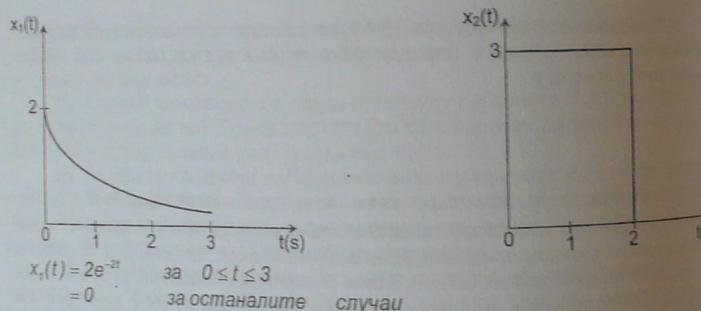
3.11. Импулс с амплитуда единица и широчина  $2ms$  е подаден на входа на схема, която има импулсната характеристика, показана на фиг. 3.38. Определете числено изходния сигнал. Интервалът на дискретизиране е  $0,5ms$ .

3.12. Функциите  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  са показани на фиг. 3.39. Пресметнете:

- тяхната конволюция –  $x_3(t)$ , числено, ако отчетите са взети за  $t=0,1,2,3,4,5$ ;
- $x_2(t)$  – аналитично.



Фиг. 3.38



Фиг. 3.39

3.13. Определете формата на изходния импулс, когато правоъгълен импулс с амплитуда  $5V$  и широчина  $0,4\mu s$  е подаден на входа на едностъпален НЧ RC-филър с честота на срезване  $6MHz$ . Приемете, че импулсната характеристика на филъра е

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t).$$

3.14. Правоъгълен импулс с височина  $5V$  и широчина  $1,0\mu s$  е подаден на входа на система с импулсна характеристика  $h(t)$ , дадена с формулите

$$h(t) = 0,1[1 - e^{-t/(1,09 \cdot 10^{-6})}] \text{ за } 0 \leq t < 10\mu s$$

$$h(t) = 0 \text{ за } 10\mu s < t < 0.$$

Определете изходния сигнал на системата

- аналитично;
- като дискретизирате  $h(t)$  всяка  $1,0\mu s$  и представите импулса чрез импулсна функция, разположена в  $t=0s$ .

3.15. Намерете функцията на взаимна корелация между двете редици от данни  $\{1,5;2,0;1,5;2,0;2,5\}$  и  $\{0,033;0,67;1,0\}$ .

- чрез директна взаимна корелация;
- чрез прилагане на теоремата за корелацията.

## ГЛАВА 4

### СИНУСОВО И КОСИНУСОВО ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ФУРИЕ

#### 4.1. Въведение

Преобразуванията, при които косинусовата и синусовата функция се използват като ядра на преобразуването, са важна област на анализа. Той се основава на т. нар. четно или нечетно развитие на функцията, които използват косинусовата и синусовата функция като базисни функции. Тъй като при косинусовите и синусовите ядра липсват някои от свойствата на експоненциалното ядро, много от свойствата на преобразуването не са така елегантни и с такова широко приложение, както съответното фуриерово преобразуване. По-специално, свойството конволюция, което е толкова важно в много приложения, тук се извършва малко по-сложно.

Независимо от тези основни математически ограничения, синус и косинус преобразуванията имат свои области на приложения – спектрален анализ на реални редици, решаване на някои гранични задачи, преобразуване на областта на цифровата обработка на сигналите. По-специално, дискретните версии на тези преобразувания са предпочитани при компресията на данни, като дискретното косинус преобразуване (ДКП) е приблизително равностойно на оптималното преобразуване на Карунен-Лое за декорелация на сигнали.

#### 4.2. Косинусово преобразуване на Фурье (КПФ)

##### 4.2.1. Дефиниции и връзка с експоненциалното преобразуване на Фурье

Нека е дадена функцията  $f(x)$  – реална или комплексна, която е дефинирана по положителната реална ос  $t \geq 0$  за  $\omega \geq 0$ . Косинусовото преобразуване на Фурье на  $f(t)$  се дефинира по следния начин

$$F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad \omega \geq 0, \quad (4.2.1)$$

при условие, че интегралът съществува.

Тази формула може да бъде записана по-компактно, ако се използва операторът  $F$ , приложен за функцията  $f(t)$

$$F_c[f(t)] = F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt. \quad (4.2.2)$$

Индексът с означава, че ядрото на преобразуването е функцията косинус.

Обратното косинус-преобразуване се дефинира по следния начин

$$F_c^{-1}[F_c(\omega)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega t dt, \quad t \geq 0, \quad (4.2.3)$$

Където отново се предполага, че интегралът съществува. Множителят  $\frac{2}{\pi}$  се нарича нормираща константа. Функциите  $f(t)$  и  $F_c(\omega)$ , ако съществуват, се казва че образуват двойка на косинус-преобразуването на Фурье.

Тъй като косинус функцията е реалната част на експоненциалната функция с чисто имагинерен аргумент, т.е.

$$\cos(\omega t) = \operatorname{Re}[e^{j\omega t}] = \frac{1}{2} [e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}], \quad (4.2.4)$$

лесно е да се разбере, че съществува много тясна връзка между фуриеровото преобразуване и косинус-преобразуването. За да разберем тази връзка, да разгледаме четното продължение на функцията  $f(t)$ , дефинирана по цялата реална ос, така че

$$f_c(t) = f_c(|t|), \quad t \in R. \quad (4.2.5)$$

Нейното фуриерово преобразуване се дефинира по следния начин

$$F[f_c(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_c(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \omega \in R. \quad (4.2.6)$$

Интегралът в (4.2.6) може да бъде пресметнат като се раздели на две части – веднъж в интервала  $(-\infty, 0)$  и втори път в интервала  $(0, \infty)$ . Като използваме (4.2.5) и променим променливата в  $(-\infty, 0]$  от  $t$  с  $-t$ , ще имаме

$$F[f_c(t)] = \left[ \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(-t) e^{j\omega t} dt \right] = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

и предвид (4.3.2) записваме

$$F[f_c(t)] = 2F_c[f(t)], \text{ ако } f_c(t) = f(|t|). \quad (4.2.7)$$

Много от свойствата на косинус-преобразуването на Фурье могат да бъдат получени от свойствата на фуриеровото преобразуване за симетрични или четни функции.

##### 4.2.2. Основни свойства и правила

1. Обратно преобразуване: Както бе посочено в т.4.2.3, обратното преобразуване е същото, както правото преобразуване с изключение на нормиращата константа. Това води до т. нар. интегрална формула за косинус-преобразуване на Фурье

$$[f(t)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau d\omega \cos \omega t d\omega. \quad (4.2.8)$$

Достатъчните условия за обратната формула (4.2.3) са, че  $f(t)$  е абсолютно интегрируема в интервала  $[0, \infty)$  и че  $f(t)$  е по части непрекъсната във всеки краен подинтервал на  $[0, \infty)$ . В интервала, където  $f(t)$  е непрекъсната, (4.2.8) представя функцията  $f(t)$ . В точката  $t_0$ , където  $f(t)$  има прекъсване, (4.2.8) е сходящ към средно аритметичното на  $f(t_0+0)$  и  $f(t_0-0)$ , т.е.

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\tau) \cos(\omega \tau) d\tau \cos(\omega t_0) d\omega = \frac{1}{2} [f(t_0+0) + f(t_0-0)]. \quad (4.2.8')$$

2. Преобразуване на производни: Лесно може да се покаже, че тъй като ядрото на косинус-преобразуването на Фурье е функцията косинус, преобразуванията на производни от четен ред се свеждат до умножение на четните степени със спрегнатата променлива на  $\omega$ , така както е в случая на лапласово преобразуване. За производната от втори ред, като използваме интегрирането по части, можем да покажем, че

$$F_c[f''(t)] = \int_0^\infty f''(t) \cos(\omega t) dt = -f'(0) - \omega^2 \int_0^\infty f(t) \cos(\omega t) dt = -\omega^2 F_c(\omega) - f'(0), \quad (4.2.9)$$

където предполагаме, че  $f(t)=0$  и  $f'(t)$ , когато  $t \rightarrow \infty$ . Това са допълнителните условия, за да бъде валидна формула (4.2.9). Ако се извършва преобразуване на производни от по-висок ред, тогава са необходими допълнителни условия за тези производни от по-висок ред, за да бъде валидно правилото за съответните случаи. Тук също предполагаме, че функцията  $f(t)$  и нейната производна  $f'(t)$  са непрекъснати в целия интервал  $[0, \infty)$ . Ако  $f(t)$  и  $f'(t)$  имат прекъсване в точката  $t_0$  с краен скок съответно  $d$  и  $d'$ , (4.2.9) се видоизменя по следния начин

$$F_c[f''(t)] = -\omega^2 F_c(\omega) - f'(0) - \omega d \sin \omega t_0 - d' \cos \omega t_0. \quad (4.2.10)$$

Косинус-преобразуването на Фурье за производната от четвърти ред е

$$F_c[f^{(IV)}(t)] = \omega^4 F_c(\omega) + \omega^2 f'(0) - f^{(III)}(0), \quad (4.2.11)$$

ако  $f(t)$  е непрекъсната в целия интервал  $[0, \infty)$  и  $f(t)$ ,  $f'(t)$ ,  $f''(t)$ ,  $f'''(t)$  стават нула, когато  $t \rightarrow \infty$ . Ако  $f(t)$ , а така също и  $f'(t)$ ,  $f''(t)$  имат в точката  $t_0$  прекъсване с краен скок съответно  $d$ ,  $d'$  и  $d''$ , тогава формула (4.2.11) се видоизменя по следния начин

$$\begin{aligned} F_c[f^{(IV)}(t)] &= \omega^4 F_c(\omega) + \omega^2 f'(0) - f^{(III)}(0) + \omega^3 d \sin \omega t_0 + \\ &+ \omega^2 d' \cos \omega t_0 - \omega d'' \sin \omega t_0 - d''' \cos \omega t_0. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Тук, и в (4.2.10), дефинираме стойностите на отскока в точката на прекъсване  $t_0$  по следния начин

$$\begin{aligned} d &= f(t_0+0) - f(t_0-0) \\ d' &= f'(t_0+0) - f'(t_0-0) \\ d'' &= f''(t_0+0) - f''(t_0-0) \\ d''' &= f'''(t_0+0) - f'''(t_0-0). \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

За производните от нечетен ред, правилото изисква дефиницията за синус-преобразуването на Фурье, дадено в т.3.3. Например, косинус-преобразуването на Фурье за производната от първи ред е

$$\begin{aligned} F_c[f'(t)] &= \int_0^\infty f'(t) \cos \omega t dt = -f(0) + \omega \int_0^\infty f(t) \sin \omega t dt = \\ &= \omega F_s[f(t)] - f(0) = \omega F_s(\omega) - f(0), \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

ако  $f=0$ , когато  $t \rightarrow \infty$ , а операторът  $F_s$  и функцията  $F_s(\omega)$  са дефинирани в (4.3.1). Когато  $f(t)$  има точка на прекъсване за  $t=t_0$  с краен отскок  $d$ , (4.2.14) се видоизменя по следния начин

$$F_c[f'(t)] = \omega F_s(\omega) - f(0) - d \cos(\omega t_0). \quad (4.2.15)$$

Обобщението за производни от по-висок нечетен ред с точка на прекъсване с краен отскок е подобно на това за производните от четен ред (4.2.12).

3. **Мащабиране:** Мащабирането във времевата област се пренася непосредствено в честотната област. Умножението с константа  $a$  (разширение) във времевата област води до деление на аргумента и амплитудата (сивиране)

със същата константа  $a$  в честотната област. Това става ясно от следващата формула

$$\begin{aligned} F_c[f(at)] &= \int_0^\infty f(at) \cos \omega t dt = \frac{1}{a} \int_0^\infty f(\tau) \cos \frac{\omega \tau}{a} d\tau, \\ &= \frac{1}{a} F_c\left(\frac{\omega}{a}\right), \text{ където } \tau = at, a > 0. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

#### 4. Преместване:

##### a) Преместване във времевата област:

Преместването във времевата област при косинус-преобразуването на Фурье не е така непосредствено, както при експоненциалното фуриерово преобразуване по две причини. Първо, преместването наляво ще наложи разширяване на дефиницията  $f(t)$  и за отрицателната част на реалната ос. Второ, преместването във времето в ядрото на преобразуването не води до появяването на константен фазов множител, както е в случая на експоненциално ядро.

Ако  $f_c(t)$  е дефинирана като четно продължение на функцията  $f(t)$ , т.e.  $f_c(t)=f(|t|)$ , и ако  $f(t)$  е по части непрекъсната и абсолютно интегруема в интервала  $[0, \infty)$ , тогава

$$\begin{aligned} F_c[f_c(t+a) + f_c(t-a)] &= \int_0^\infty [f_c(t+a) + f_c(t-a)] \cos \omega t dt = \\ &= \int_0^\infty f_c(\tau) \cos \omega(\tau+a) d\tau + \int_0^\infty f_c(\tau) \cos \omega(\tau-a) d\tau. \end{aligned}$$

Като развием сложната косинусова функция и използваме факта, че функцията  $f_c(\tau)$  е четна, получаваме

$$F_c[f_c(t+a) + f_c(t-a)] = 2F_c(\omega) \cos a\omega, \quad a > 0. \quad (4.2.17)$$

Ако не е наложено ограничението, че функцията  $f(t)$  е четна, можем да запишем

$$F_c[f(t+a) + f(t-a)] = 2F_c(\omega) \sin a\omega, \quad a > 0. \quad (4.2.18)$$

По подобен начин, за синус-преобразуването на Фурье можем да запишем

$$F_s[f(|t-a|) - f(t+a)] = 2F_s(\omega) \sin a\omega, \quad a > 0. \quad (4.2.19)$$

##### b) Преместване в честотната област:

Да разгледаме случая, когато честотата  $\omega$  е преместена с константа  $\beta > 0$ . Имаме

$$\begin{aligned} F_c(\omega + \beta) &= \int_0^\infty f(t) \cos(\omega + \beta) dt = \int_0^\infty f(t) \cos \omega \cos \beta dt - \int_0^\infty f(t) \sin \omega \sin \beta dt \\ &= F_c[f(t) \cos \beta] - F_s[f(t) \sin \beta]. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

По подобен начин,

$$F_c(\omega - \beta) = F_c[f(t) \cos \beta] + F_s[f(t) \sin \beta]. \quad (4.2.20')$$

От съвместното разглеждане на (4.2.20) и (4.2.20') се получава прави-

лото за преместването в честотната област, при което се използва само синус-преобразуването на Фурье:

$$F_c[f(t) \cos \beta t] = \frac{1}{2} [F_c(\omega + \beta) + F_c(\omega - \beta)]. \quad (4.2.21)$$

По общата формула за  $\alpha, \beta > 0$  е

$$F_c[f(at) \cos \beta t] = \frac{1}{2a} \left[ F_c\left(\frac{\omega + \beta}{a}\right) + F_c\left(\frac{\omega - \beta}{a}\right) \right]. \quad (4.2.22)$$

По подобен начин можем да получим

$$F_s[f(at) \sin \beta t] = \frac{1}{2a} \left[ F_s\left(\frac{\omega + \beta}{a}\right) - F_s\left(\frac{\omega - \beta}{a}\right) \right]. \quad (4.2.23)$$

#### 5. Диференциране в честотната област:

По подобен начин на диференцирането във времевата област, операцията на преобразуването свежда операцията диференциране до умножение с подходяща степен на спрепнатата променлива. За случая на производни от четен ред преобразуването в честотната област се извършва по формулата:

$$F_c^{(2n)}(\omega) = F_c[(-1)^n t^{2n} f(t)]. \quad (4.2.24)$$

Ще разгледаме накратко диференцирането за  $n=1$

$$\begin{aligned} F_c^{(2)}(\omega) &= \frac{d^2}{d\omega^2} \int_0^\infty f(t) \cos \omega t dt = \int_0^\infty f(t) \frac{d^2}{d\omega^2} \cos \omega t dt = \int_0^\infty f(t) (-1)t^2 \cos \omega t dt = \\ &= F_c[(-1)t^2 f(t)]. \end{aligned}$$

За нечетен ред производни съществува съответно синус-преобразуване на Фурье

$$F_s^{(2n+1)}(\omega) = F_s[(-1)^{n+1} t^{2n+1} f(t)]. \quad (4.2.25)$$

Предполага се, че интегралите в последните две формули съществуват. Това означава, че  $f(t)$  е по части непрекъсната и, че  $t^{2n}f(t)$  и  $t^{2n+1}f(t)$  са абсолютно интегрируеми в интервала  $[0, \infty)$ .

**6. Асимптотично поведение:** Ако функцията  $f(t)$  е по части непрекъсната и абсолютно интегрируема в областта  $[0, \infty)$ , то като се позовем на теоремата на Риман-Лебег за фуриеровите редове<sup>1</sup> може да се изведе следната формула за асимптотичното поведение на косинус-преобразуването:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} F_c(\omega) = 0. \quad (4.2.26)$$

#### 7. Интегриране:

##### a) Интегриране във времевата област:

Интегрирането във времевата област се преобразува в деление на спрепнатата променлива. То е подобно на лапласовото и фуриеровото пре-

<sup>1</sup> Теоремата на Риман-Лебег твърди, че ако функцията  $f(t)$  е по части непрекъсната в интервала  $a < t < b$ , тогава

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^b |f(t)| dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^b |f(t)| dt = 0.$$

разуване, с тази разлика, че се получава синус-преобразуване на Фурье.

Имаме

$$F_c \left[ \int_0^\infty f(t) dt \right] = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau) d\tau \cos \omega t dt = \int_0^\infty \int_0^\infty \cos \omega t dt f(\tau) d\tau,$$

след смяна на реда на интегриране. Решението на вътрешния интеграл е функцията синус, която е ядро на синус-преобразуването на Фурье. Можем да запишем

$$F_c \left[ \int_0^\infty f(t) dt \right] = \frac{1}{\omega} F_s[f(\tau)] = \frac{1}{\omega} F_s(\omega). \quad (4.2.26)$$

Тук отново предполагаме, че  $f(t)$  е по части непрекъсната и абсолютно интегрируема в интервала  $[0, \infty)$ .

##### b) Интегриране в честотната област:

В сила е следната формула

$$F_s^{-1} \left[ \int_\omega^\infty F_c(\beta) d\beta \right] = -\frac{1}{t} f(t). \quad (4.2.27)$$

#### 8. Свойството конволюция:

Нека функциите  $f(t)$  и  $g(t)$  са дефинирани в интервала  $[0, \infty)$  и удовлетворяват достатъчното условие за съществуването на  $F_c$  и  $G_c$ . Ако  $f_c(t) = f(|t|)$  и  $g_c(t) = g(|t|)$  са четните продължения на  $f$  и  $g$  по цялата реална ос, тогава конволюцията на  $f_c$  и  $g_c$  се определя с формулата

$$f_c * g_c = \int_{-\infty}^{\infty} f_c(\tau) g_c(t - \tau) d\tau, \quad (4.2.28)$$

където  $*$  означава операцията конволюция. Лесно е да се види, че е валидна формулата

$$f_c * g_c = \int_0^\infty f(\tau) [g(t + \tau) + g(|t - \tau|)] d\tau, \quad (4.2.29)$$

която е четна функция. Ако приложим експоненциалното фуриерово преобразуване за двете страни и използваме (4.2.7) и свойството конволюция на експоненциалното фуриерово преобразуване, получаваме свойството конволюция за косинус-преобразуването.

$$2F_c(\omega)G_c(\omega) = F_c \left\{ \int_0^\infty f(\tau) [g(t + \tau) + g(|t - \tau|)] d\tau \right\}. \quad (4.2.30)$$

По подобен начин, косинус-преобразуването на конволюцията на нечетно продължен функции е свързано със синус-преобразуването по следния начин

$$2F_s(\omega)G_s(\omega) = F_c \left\{ \int_0^\infty f(\tau) [g(t + \tau) + g_o(t - \tau)] d\tau \right\}, \quad (4.2.31)$$

където

$$\begin{aligned} g_o(t) &= g(t) & \text{за} & & t > 0; \\ g_o(t) &= -g(-t) & \text{за} & & t < 0 \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

е дефинирана като нечетно продължение на функцията  $g(t)$ .

### 4.2.3. Косинус-преобразуване на Фурье за някои често срещани функции

#### 4.2.3.1. КПФ на алгебрични функции

1. Единична правоъгълна функция:

$$\begin{aligned} f(t) &= U(t) - U(t-a), \text{ където } U(t) = 0 \text{ за } t < 0; \\ f(t) &= U(t) - U(t-a), \text{ където } U(t) = 1 \text{ за } t > 0 \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

е функцията единичен скок на Хевисайд.

$$F_c[f(t)] = \int_0^a \cos \omega t dt = \frac{1}{\omega} \sin \omega a. \quad (4.2.34)$$

2. Функция тип "палатка" с височина единица:

$$f(t) = \begin{cases} t/a & \text{за } 0 < t < a, \\ (2a-t)/a & \text{за } a < t < 2a, \\ 0 & \text{за } t > 2a. \end{cases}$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^a \frac{1}{a} \cos \omega t dt + \int_a^{2a} \frac{2a-t}{a} \cos \omega t dt = \frac{1}{a\omega} [2 \cos a\omega t - \cos 2a\omega t] \quad (4.2.35)$$

3. Реципрочно закъснение:

$$f(t) = U(t-a)/t.$$

$$F_c[f(t)] = \int_a^\infty \frac{1}{t} \cos \omega t dt = \int_{a\omega}^\infty \cos \tau d\tau = -Ci(a\omega), \quad (4.2.36)$$

където  $Ci(a\omega) = -\int_\gamma^\infty \cos \tau d\tau$  е функцията интегрален косинус.

4. Реципрочен квадратен корен:

$$f(t) = 1/\sqrt{t}.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \cos \omega t dt = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}. \quad (4.2.37)$$

Формула (4.2.37) е получена като е използвана субституцията  $t=z^2$  и е решен интегралът

$$2 \int \cos z^2 dz$$

в комплексната равнина.

5. Реципрочна линейна функция:

$$f(t) = (\alpha + t)^{-1} \quad |\arg \alpha| < \pi.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty (\alpha + t)^{-1} \cos \omega t dt = -\cos \alpha\omega Ci(\alpha\omega) - \sin \alpha\omega Si(\alpha\omega). \quad (4.2.38)$$

Формула (4.2.38) е получена чрез преместване на променливата до положението  $(\alpha + t)$  и след това разширяване на съставната косинусова функция. Тук  $Si(y)$  е свързана с функцията интегрален синус  $Si(y)$  по следния начин

$$F_c Si(y) = -\int_y^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = Si(y) - \frac{\pi}{2}. \quad (4.2.39)$$

6. Реципрочни квадратни функции:

$$a) \quad f(t) = (\alpha^2 + t^2)^{-1} \quad Re \alpha > 0.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty (\alpha^2 + t^2)^{-1} \cos \omega t dt = \frac{\pi}{2a} e^{-a/\omega}. \quad (4.2.40)$$

Този резултат е получен като е решен контурен интеграл за горната полуравнина

$$b) \quad f(t) = (\alpha^2 - t^2)^{-1} \quad \alpha > 0.$$

$$F_c[f(t)] = P.V. \int_0^\infty (\alpha^2 - t^2)^{-1} \cos \omega t dt = \frac{\pi}{2a} \sin a\omega, \quad (4.2.41)$$

където "P.V." означава "главна стойност" (principal value), а интегралът е решен като контурен интеграл в комплексната равнина.

$$c) \quad f(t) = \frac{\beta}{\beta^2 + (\alpha - t)^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + (\alpha + t)^2}, \quad Im|\alpha| < Re \beta.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty \left[ \frac{\beta}{\beta^2 + (\alpha - t)^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + (\alpha + t)^2} \right] \cos \omega t dt = \pi \cos \alpha \omega e^{-\beta \omega}, \quad (4.2.42)$$

където интегралът може да бъде решен като се извърши преместване по  $t$  и се приложи резултатът от (4.2.40).

$$d) \quad f(t) = \frac{\alpha - t}{\beta^2 + (\alpha - t)^2} + \frac{\alpha + t}{\beta^2 + (\alpha + t)^2}, \quad Im|\alpha| < Re \beta.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty \left[ \frac{\alpha - t}{\beta^2 + (\alpha - t)^2} + \frac{\alpha + t}{\beta^2 + (\alpha + t)^2} \right] \cos \omega t dt = \pi \sin \alpha \omega e^{-\beta \omega}. \quad (4.2.43)$$

Този резултат може да бъде разглеждан като имагинерната част на контурния интеграл, решен в (4.2.42), когато  $\alpha$  и  $\beta$  са реални положителни числа.

#### 4.2.3.2. КПФ на експоненциални и логаритмични функции

$$1. \quad f(t) = e^{-at}, \quad Re(a) > 0.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty e^{-at} \cos \omega t dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (4.2.44)$$

Този резултат е еднакъв с лапласовото преобразуване на  $\cos \omega t$ .

$$2. \quad f(t) = \frac{1}{t} [e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}], \quad Re(\alpha), Re(\beta) > 0.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty \frac{1}{t} [e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}] \cos \omega t dt = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\beta^2 + \omega^2} \right). \quad (4.2.45)$$

Резултатът се получава лесно, ако се използва свойството интегриране на лапласовото преобразуване във фазовата равнина.

$$3. \quad f(t) = e^{-at^2}, \quad Re(a) > 0.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-at^2} \cos \omega t dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\omega^2/4\alpha}. \quad (4.2.46)$$

Лесно е да се види, че това е резултат от експоненциалното фуриерово преобразуване на гаусовото разпределение.

$$4. f(t) = \ln t [1 - U(t-1)].$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty \ln t \cos \omega \tau dt = -\frac{1}{\omega} \int_0^\infty \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = -\frac{1}{\omega} Si(\omega). \quad (4.2.47)$$

Резултатът се получава като се извърши интегриране по части и смята на променливите. Функцията  $Si(\omega)$  е интегрален синус, дефинирана по следния начин

$$Si(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx. \quad (4.2.48)$$

$$5. f(t) = \frac{\ln \beta t}{(t^2 + \alpha^2)}, \quad Re(\alpha) > 0.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty \frac{\ln \beta t}{(t^2 + \alpha^2)} \cos \omega t dt = \frac{\pi}{4\alpha} \left\{ 2e^{-\alpha\omega} \ln(\alpha\beta) + e^{\alpha\omega} Ei(-\alpha\omega) - e^{-\alpha\omega} \bar{Ei}(\alpha\omega) \right\}, \quad (4.2.49)$$

където  $Ei(y)$  е функцията интегрална експонента, дефинирана по следния начин:

$$Ei(y) = -\int_{-\gamma}^y \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad |\arg y| < \pi,$$

и

$$\bar{Ei}(y) = (1/2)[Ei(y+j0) + Ei(y-j0)], \quad (4.2.50)$$

Интегралът в (4.2.49) е пресметнат като е използвано интегриране по контур.

$$6. f(t) = \ln \left| \frac{t+a}{t-a} \right|, \quad a > 0.$$

$$F_c[f(t)] = P.V. \int_0^\infty \left| \frac{t+a}{t-a} \right| \cos \omega t dt = \frac{2}{\omega} [si(a\omega) \cos a\omega + ci(a\omega) \sin a\omega], \quad (4.2.51)$$

където  $si(y)$  и  $ci(y) = -\bar{Ci}(y)$  са дефинирани с (4.2.39) и (4.2.36). Резултатът е получен чрез интегриране по части и илюстрира свойството преместване на косинус-преобразуването.

#### 4.2.3.3. КПФ на тригонометрични функции

$$1. f(t) = \frac{\sin at}{t}, \quad a > 0.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty \frac{\sin at}{t} \cos \omega t dt = \begin{cases} \pi/2, & \text{ако } \omega < a, \\ \pi/4, & \text{ако } \omega = a, \\ 0, & \text{ако } \omega > a. \end{cases} \quad (4.2.52)$$

Може да се направи изводът, че обратното фуриерово преобразуване на sinc-функцията е функцията на правовъгълния прозорец.

$$2. f(t) = e^{at} \sin at, \quad a > 0, Re(\beta) > 0.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty e^{-\beta t} \sin at \cos \omega t dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha + \omega}{\beta^2 + (\alpha + \omega)^2} + \frac{\alpha - \omega}{\beta^2 + (\alpha - \omega)^2} \right]. \quad (4.2.53)$$

Резултатът е лапласовото преобразуване на функцията

$$\frac{1}{2} [\sin(a + \omega)t + \sin(a - \omega)t].$$

$$3. f(t) = e^{-\beta t} \cos at, \quad Re(\beta) > |Im(a)|.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty e^{-\beta t} \cos at \cos \omega t dt = \frac{\beta}{2} \left[ \frac{1}{\beta^2 + (a - \omega)^2} + \frac{1}{\beta^2 + (a + \omega)^2} \right]. \quad (4.2.54)$$

а това е лапласовото преобразуване на функцията  $\frac{1}{2} [\cos(a + \omega)t + \cos(a - \omega)t]$ .

$$4. f(t) = \frac{t \sin at}{(t^2 + \beta^2)}, \quad a, Re(\beta) > 0.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty \frac{t \sin at}{(t^2 + \beta^2)} \cos \omega t dt = \frac{\pi}{2} e^{-\beta\omega} \cosh \beta\omega, \quad \text{ако } \omega < a, \quad (4.2.55)$$

$$= -\frac{\pi}{2} e^{-\beta\omega} \sinh a\beta, \quad \text{ако } \omega > a.$$

Резултатът се получава чрез решаване на интеграл по контур.

$$5. f(t) = \frac{\cos at}{(t^2 + \beta^2)}, \quad a, Re(\beta) > 0.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty \frac{\cos at}{(t^2 + \beta^2)} \cos \omega t dt = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta\omega} \cosh \beta\omega, \quad \text{ако } \omega < a, \quad (4.2.56)$$

$$= -\frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta\omega} \cosh a\beta, \quad \text{ако } \omega > a.$$

$$6. f(t) = e^{-\beta t^2} \cos at, \quad Re(\beta) > 0.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty e^{-\beta t^2} \cos at \cos \omega t dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-(a^2 + \omega^2)/4\beta} \cosh \frac{a\omega}{2\beta}, \quad (4.2.57)$$

#### 4.2.3.4. КПФ на ортогонални полиноми

##### 1. Полиноми на Лежандъръ:

$$f(t) = \begin{cases} P_n(1-2t^2), & 0 < t < 1, \\ 0, & t > 0, \end{cases}$$

където полиномите на Лежандър  $P_n(x)$  се дефинират по следния начин

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad \text{за } |x| < 1 \text{ и } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty P_n(1-2t^2) \cos at dt = \frac{(-1)^n \pi}{2} J_{n+\frac{1}{2}}(\omega/2) J_{-\frac{n-1}{2}}(\omega/2), \quad (4.2.58)$$

където  $J_\nu(z)$  е функция на Бесел от първи тип и ред  $\nu$ , дефинирана по следния начин

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m (z/2)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)}, \quad |z| < \infty, |\arg z| < \pi. \quad (4.2.58')$$

##### 2. Полиноми на Чебишевъв:

$$f(t) = (a^2 - t^2)^{-1/2} T_{2n}(t/a), \quad 0 < t < a, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$= 0, \quad t > a,$$

където полиномът на Чебишел се дефинира по следния начин

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty (a^2 - t^2)^{-1/2} T_{2n} \cos \omega t dt = (-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right) J_{2n}(a\omega), \quad (4.2.59)$$

където  $J_{2n}(x)$  е функцията на Бесел, дефинирана в (4.2.58) с  $v = 2n$ .

### 3. Полином на Лагер:

$$f(t) = e^{-t^2/2} L_n(t^2),$$

където  $L_n(x)$  е полиномът на Лагер, дефиниран по следния начин

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty e^{-t^2/2} L_n(t^2) \cos \omega t dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n!} e^{-\omega^2/2} \{He_n(\omega)\}^2, \quad (4.2.60)$$

където  $He_n(x)$  е полиномът на Ермит, дефиниран по следния начин

$$He_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

### 4. Полиноми на Ермит:

$$a) \quad f(t) = e^{-t^2/2} He_{2n}(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty e^{-t^2/2} He_{2n}(t) \cos \omega t dt = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega^2/2} \omega^{2n}. \quad (4.2.61)$$

Този резултат е получен като е използвана формулата на Родригес за полинома на Ермит, дадена в (a) по-горе.

$$b) \quad f(t) = e^{-t^2/2} \{He_n(t)\}^2.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty e^{-t^2/2} \{He_n(t)\}^2 \cos \omega t dt = n! \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega^2/2} L_n(\omega^2), \quad (4.2.62)$$

което показва симетрия с (4.2.60).

#### 4.2.3.5. КПФ на някои специални функции

##### 1. Функция на грешката:

$$f(t) = t \operatorname{Erfc}(at), \quad a > 0.$$

Тук функцията на грешката се дефинира по следния начин

$$\operatorname{Erfc}(x) = 1 - \operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty t \operatorname{Erfc}(at) \cos \omega t dt = \left[ \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{\omega^2} \right] e^{-\omega^2/4a^2} - \frac{1}{\omega^2}. \quad (4.2.63)$$

##### 2. Функцията интегрален синус:

$$f(t) = si(at), \quad a > 0,$$

където  $si(x)$  е дефинирана в (4.2.39).

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty si(at) \cos \omega t dt = -\left(\frac{1}{2\omega}\right) \ln \left| \frac{\omega + a}{\omega - a} \right|, \quad \omega \neq a. \quad (4.2.64)$$

Ще отбележим, че съществува някакво частична симетрия с (4.2.51).

##### 3. Функцията интегрален косинус:

$$f(t) = Ci(at) = -ci(at), \quad a > 0,$$

където  $ci(x)$  е дефинирана в (4.2.36).

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty Ci(at) \cos \omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{за } 0 < \omega < a, \\ -\frac{\pi}{2\omega} & \text{за } \omega > a. \end{cases} \quad (4.2.65)$$

##### 4. Функцията интегрална експонента:

$$f(t) = Ei(-at), \quad a > 0,$$

където  $Ei(-x)$  е дефинирана по следния начин

$$Ei(-x) = - \int_0^\infty (e^{-t} / t) dt, \quad |\arg x| < \pi.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty Ei(-at) \cos \omega t dt = -\frac{1}{\omega} \arctg \left( \frac{\omega}{a} \right). \quad (4.2.66)$$

##### 5. Беселови функции:

$$a) \quad f(t) = J_0(at), \quad a > 0,$$

където  $J_0(x)$  е беселова функция от първи тип, дефинирано в (4.2.58).

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty J_0(at) \cos \omega t dt = \begin{cases} (a^2 - \omega^2)^{-1/2} & \text{за } 0 < \omega < a, \\ \infty & \text{за } \omega = a, \\ 0 & \text{за } \omega > a. \end{cases} \quad (4.2.67)$$

$$b) \quad f(t) = J_{2n}(at), \quad a > 0.$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty J_{2n}(at) \cos \omega t dt = \begin{cases} (-1)^n (a^2 - \omega^2)^{-1/2} T_{2n}(\omega/a) & \text{за } 0 < \omega < a, \\ \infty & \text{за } \omega = a, \\ 0 & \text{за } \omega > a. \end{cases} \quad (4.2.68)$$

$T_{2n}(x)$  е полином на Чебишел, дефиниран (4.2.59). Ще отбележим, че съществува симетрия между тази формула и (4.2.59).

$$b) \quad f(t) = t^{-n} J_n(at), \quad a > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty t^{-n} J_n(at) \cos \omega t dt = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+1/2)} (2a)^{-n} (a^2 - \omega^2)^{n-1/2} & \text{за } 0 < \omega < a, \\ 0 & \text{за } \omega > a. \end{cases} \quad (4.2.69)$$

където  $\Gamma(x)$  е гама функцията, дефинирана по следния начин

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

$$r) \quad f(t) = Y_0(at), \quad a > 0,$$

където  $Y_0(x)$  е функцията на Бесел от втори тип

$$Y_0(x) = \cos ec(v\pi)[J_v(x)\cos(v\pi) - J_{-v}(x)]. \quad (4.2.70)$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty Y_0(at) \cos \omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{за } 0 < \omega < a, \\ -(\omega^2 - a^2)^{-1/2} & \text{за } \omega > a. \end{cases} \quad (4.2.70)$$

$$d) \quad f(t) = t^v Y_v(at), \quad |Re(v)| < 1/2, \quad a > 0,$$

$$F_c[f(t)] = \int_0^\infty t^v Y_v(at) \cos \omega t dt = \begin{cases} -\sqrt{\pi}(2a)^v [\Gamma(1/2 - v)]^{-1} (\omega^2 - a^2)^{-v-1/2} & \text{за } \omega > a, \\ 0 & \text{за } 0 < \omega < a. \end{cases} \quad (4.2.71)$$

#### 4.2.4. Примери за приложение на КПФ

##### 4.2.4.1. Диференциране във времевата област

Нека  $f(t) = e^{-at}$ , където  $Re(a) > 0$ . Като използваме (4.2.44) за КПФ получаваме

$$F_c(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

За да получим КПФ за  $f'(t)$ , ще използваме свойството диференциране във времевата област (4.2.9).

$$F_c[f''(t)] = -\omega^2 F_c(\omega) - f'(0) = -\omega^2 \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} + \alpha = \frac{\alpha^3}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (4.2.72)$$

Този резултат може да се провери, като се вземе предвид, че  $f'(t) = a^2 e^{-at}$  и тогава се получава директно КПФ (4.2.72).

##### 4.2.4.2. Диференциране на функция, която има точка на прекъсване с краен скок

Да разгледаме функцията  $f(t) = tU(1-t)$ , която понякога се нарича пилообразна функция. Тя има точка на прекъсване с краен отскок  $d=-1$  за  $t=1$ . Нейната производна е  $f'(t) = U(1-t)$ , която също има точка на прекъсване с краен скок за  $t=1$ . Ако използваме дефиницията за КПФ, получаваме

$$F_c[f'(t)] = F_c[U(1-t)] = \frac{\sin \omega}{\omega}. \quad (4.2.73)$$

Правилото за диференциране на функция, която има точка на прекъсване с краен отскок (4.2.14), може също да бъде приложена

$$F_c[f'(t)] = \omega F_s(\omega) - f(0) - d \cos \omega t_0 = \omega \left[ -\frac{\cos \omega}{\omega} + \frac{\sin \omega}{\omega^2} \right] - (-1) \cos \omega = \frac{\sin \omega}{\omega},$$

тъй като  $d=-1$  и  $f(0)=0$ .

Това е същият резултат, както (4.2.73).

##### 4.2.4.3. Свойствата преместване във времевата и честотната област

Нека  $f(t) = e^{-at}$ , където  $Re(a) > 0$ . КПФ на функция, която има положително преместване във времевата област е

$$F_c[f(t+a)] = -e^{-a\omega} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad a > 0. \quad (4.2.74)$$

За да получим КПФ на функцията  $f(|t-a|)$ , може да се приложи свойството (4.2.18). Получава се

$$F_c[f(|t-a|)] = 2F_c(\omega) \cos a\omega - F_c[f(t+a)].$$

Следователно,

$$F_c[e^{-a|t-a|}] = 2 \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \cos a\omega - e^{-a\omega} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} [2 \cos a\omega - e^{-a\omega}], \quad (4.2.75)$$

който резултат се получава много по-лесно отколкото при непосредственото пресмятане.

Ако приложим формулата за преместване в честотната област (4.2.21) за същата функция  $f(t)$ , получаваме

$$F_c[e^{-at} \cos \beta t] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \beta)^2} \right]. \quad (4.2.76)$$

##### 4.2.4.4. Свойството диференциране в честотната област

Свойството (4.2.23) може често да бъде използвано за получаване на КПФ за функции, които не са включени в таблиците. Да разгледаме, като пример, отново функцията  $f(t) = e^{-at}$ , където  $Re(a) > 0$ . За да получим КПФ за функцията  $g(t) = t^2 e^{-at}$ , може да използваме (4.2.23) като  $F_c(\omega)$  за  $f(t) = e^{-at}$ . Имаме

$$F_c''(\omega) = -2\alpha \frac{\alpha^2 - 3\omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^3},$$

тъй като

$$F_c[e^{-at}] = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

и

$$F_c[t^2 e^{-at}] = 2\alpha \frac{\alpha^2 - 3\omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^3},$$

където сме използвали (4.2.23) за  $n=1$ .

##### 4.2.4.5. Свойството конволюция

Нека  $f(t) = e^{-at}$ , където  $Re(a) > 0$  и  $g(t) = U(t) - U(t-a)$ ,  $a > 0$ . КПФ за тези функции са съответно

$$F_c(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \text{ и } G_c(\omega) = \frac{\sin a\omega}{\omega}.$$

Тогава

$$2F_c(\omega)G_c(\omega) = 2 \left[ \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \right] \left[ \frac{\sin a\omega}{\omega} \right].$$

Според свойството конволюция (4.2.20) това е КПФ за конволюцията, дефинирана по следния начин

$$\int_0^\infty [U(t) - U(t-a)] [e^{-a(t+\tau)} + e^{-a(t-\tau)}] d\tau. \quad (4.2.77)$$

Прилагаме оператора  $F_c$  за (4.2.77) и интегрираме първо спрямо  $t$ . След това използваме свойствата умножение и преместване във времето (4.2.18).

Получава се

$$F_c \{U(\tau) - U(\tau-a)\} [e^{-a(t+\tau)} + e^{-a(t-\tau)}] d\tau = 2 \int_0^\infty [U(\tau) - U(\tau-a)] \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \cos \omega \tau d\tau = \\ = 2 \left[ \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \right] \frac{\sin a \omega}{\omega},$$

което се очакваше.

#### 4.3. Синус-преобразуване на Фурье (СПФ)

##### 4.3.1. Дефиниции и връзка с експоненциалното преобразуване на Фурье

Предполагаме, че функцията  $f(x)$  е по части непрекъсната и абсолютно интегрируема в интервала  $(0, \infty)$ . СПФ се дефинира по следния начин

$$F_s(\omega) = F_s[f(t)] = \int_0^\infty f(t) \sin \omega t dt, \quad \omega > 0. \quad (4.3.1)$$

Обратният оператор  $F_s^{-1}$  се дефинира по подобен начин

$$f(t) = F_s^{-1}[F_s(\omega)] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_s(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad t \geq 0, \quad (4.3.2)$$

като се предполага, че интегралът съществува. Функциите  $f(t)$  и  $F_s(\omega)$ , дефинирани с (4.3.2) и (4.3.1) преобразуват двойка на синус-преобразуването на Фурье. Ще отбележим, че във формулите (4.2.3) и (4.3.2) за обратното КПФ и обратното СПФ операторите на преобразуване имат симетрични ядра и са умножени с константата  $\sqrt{2}/\pi$ .

Синус-преобразуването на Фурье е също много тясно свързано с експоненциалното преобразуване на Фурье, дефинирано с (2.2.6), ако използваме формулата

$$\sin \omega t = \operatorname{Im}[e^{i\omega t}] = \frac{1}{2j} [e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}], \quad (4.3.3)$$

за нечетното продължение на функцията  $f(t)$ , дефинирана в интервала  $[0, \infty]$ , може да запишем

$$f_o(t) = \begin{cases} f(t) & \text{за } t \geq 0, \\ -f(-t) & \text{за } t < 0. \end{cases}$$

Тогава фуриеровото преобразуване на  $f_o(t)$  е

$$F[f_o(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_o(t) e^{-i\omega t} dt = - \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \\ = -2j \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = -2j F_s[f(t)]$$

и следователно,

$$F_s[f(t)] = -\frac{1}{2j} F[f_o(t)] \quad (4.3.4)$$

Тази формула дава връзката между СПФ и експоненциалното преобра-

зуващие на Фурье. Подобно на случая с косинус-преобразуването, много свойства на синус-преобразуването може да се свържат с тези на фуриеровото преобразуване чрез тази формула.

##### 4.3.2. Основни свойства и правила

1. Обратно преобразуване: Обратното преобразуване е същото, както правото преобразуване с изключение на нормиращата константа. Комбинацията от правото и обратното преобразуване води до интегралната формула на СПФ, според която

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_s(\omega) \sin \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [f(\tau) \sin \omega \tau d\tau] \sin \omega t d\omega. \quad (4.3.5)$$

Достатъчните условия за обратната формула (4.3.2) са същите, както при косинус-преобразуването. Ако  $f(t)$  има точка на прекъсване с краен скок в  $t=t_0$ , интегралите в (4.3.2) са сходящи към средно аритметичната стойност на  $f(t_0+0)$  и  $f(t_0-0)$ .

2. Преобразуване на производни: Преобразуването на производни е подобно на това при КПФ. Ако производната е от четен ред, необходимо е само синус-преобразуване, ако е от нечетен ред – само косинус-преобразуване.

Например,

$$F_s[f''(t)] = -\omega^2 F_s(\omega) + \omega f'(0) \quad (4.3.6)$$

и

$$F_s[f'(t)] = -\omega F_s(\omega), \quad (4.3.7)$$

където се предполага, че  $f(t)$  и  $f'(t)$  са непрекъснати.

За производната от четвърти ред използваме (4.3.6) дузкратно, за да получим

$$F_s[f^{(IV)}(t)] = \omega^4 F_s(\omega) - \omega^3 f'(0) + \omega f''(0), \quad (4.3.8)$$

ако  $f(t)$  е непрекъсната до производната от трети ред включително. Ако функцията  $f(t)$  и нейните производни имат точки на прекъсване с краен отскок за  $t=t_0$ , (4.3.8) се видоизменя по следния начин

$$F_s[f^{(IV)}(t)] = \omega^4 F_s(\omega) - \omega^3 f'(0) + \omega f''(0) - \omega^3 d \cos \omega t_0 + \\ + \omega^2 d' \sin \omega t_0 - d'' \cos \omega t_0 - d''' \sin \omega t_0, \quad (4.3.9)$$

където отскочите в точките на прекъсване  $d$ ,  $d'$ ,  $d''$  и  $d'''$  са дефинирани с (4.2.13). По подобен начин се модифицира правилото за производните от нечетен ред, когато функцията  $f(t)$  има прекъсване с краен отскок.

Например, (4.3.7) ще бъде

$$F_s[f'(t)] = -\omega F_s(\omega) + d \sin \omega t_0. \quad (4.3.7)$$

Обобщението за произведението от по-висок нечетен ред може да бъде направено по подобен начин.

3. Машабиране: Умножаването на аргумента във времевата област за СПФ има точно същия ефект, както в случаите на КПФ

$$F_s[f(at)] = \frac{1}{a} F_s\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad \text{където } a > 0. \quad (4.3.10)$$

4. Преместване:

а) Преместване във времевата област:

Първоначално, както това бе направено за КПФ, ще дефинираме четно-то и нечетно продължение на функцията  $f(t)$  по следния начин

$$f_e(t) = f(|t|) \quad \text{и} \quad f_o(t) = (t/|t|) \cdot f(|t|). \quad (4.3.11)$$

Може да бъде показано, че

$$F_s[f_o(t+a) + f_o(t-a)] = 2F_s(\omega) \cos a\omega \quad (4.3.12)$$

и

$$F_c[f_o(t+a) + f_o(t-a)] = 2F_s(\omega) \sin a\omega, \quad a > 0. \quad (4.3.13)$$

б) Преместване в честотната област:

Нека преместването в честотната област е  $\beta > 0$ . Може да се покаже, че

$$F_s[\omega + \beta] = F_s[f(t) \cos \beta t] + F_c[f(t) \sin \beta t] \quad (4.3.14)$$

и ако се комбинира със случая за  $\beta < 0$ , получаваме

$$F_s[f(t) \cos \beta t] = 1/2 [F_s(\omega + \beta) + F_s(\omega - \beta)]. \quad (4.3.15)$$

В общия случай за  $a, \beta > 0$  имаме

$$F_s[f(at) \cos \beta t] = \frac{1}{2a} \left[ F_s\left(\frac{\omega + \beta}{a}\right) + F_s\left(\frac{\omega - \beta}{a}\right) \right]. \quad (4.3.16)$$

По подобен начин можем да покажем, че

$$F_s[f(at) \sin \beta t] = \frac{1}{2a} \left[ F_c\left(\frac{\omega + \beta}{a}\right) - F_c\left(\frac{\omega - \beta}{a}\right) \right]. \quad (4.3.17)$$

Преместването в честотната област има приложение за получаване на други КПФ и СПФ, а също в комуникациите, тъй като е свързано с процесите на модулацията.

5. Диференциране в честотната област:

И тук правилата за диференциране при синус-преобразуването са подобни на тези при косинус-преобразуването. Правилото за производните от четен ред включва само синус-преобразуване, а от нечетен ред – само косинус-преобразуване. Така, например

$$\begin{aligned} F_s^{(2n)}(\omega) &= F_s[(-1)^n t^{2n} f(t)] \quad \text{и} \\ F_s^{(2n+1)}(\omega) &= F_s[(-1)^n t^{2n+1} f(t)]. \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

Тук предполагаме, че интегралите съществуват.

6. Асимптотично поведение: Теоремата на Риман-Лебег гарантира, че всяко СПФ е сходящо към нула, когато  $\omega \rightarrow \infty$ , т.е.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} F_s(\omega) = 0. \quad (4.3.19)$$

7. Интегриране:

а) Интегриране във времевата област:

Подобно на (4.2.26) имаме

$$F_s \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] = (1/\omega) F_c(\omega), \quad (4.3.20)$$

при предположение, че  $f(t)$  е по части гладка и абсолютно интегрируема в интервала  $[0, \infty)$ .

б) Интегриране в честотната област:

Подобно на КПФ, интегрирането в честотната област води до деление на  $t$  във времевата област,

$$F_c^{-1} \left[ \int_0^\omega F_s(\beta) d\beta \right] = (1/t) f(t), \quad (4.3.21)$$

както е в (4.2.27).

8. Свойството конволюция: Ако функциите  $f(t)$  и  $g(t)$  са по части непрекъснати и абсолютно интегрируеми в интервала  $[0, \infty)$ , свойството конволюция се записва така

$$2F_s(\omega)G_c(\omega) = F_s \left\{ \int_0^\omega f(\tau) [g(t-\tau) - g(t+\tau)] d\tau \right\}. \quad (4.3.22)$$

Равностоен на горния израз е

$$2F_s(\omega)G_c(\omega) = F_s \left\{ \int_0^\omega g(\tau) [f(t+\tau) + f_o(t-\tau)] d\tau \right\}, \quad (4.2.23)$$

където  $f_o(x)$  е нечетното продължение на функцията  $f(x)$ , дефинирано както в (4.3.11).

Възможно е да се запише теоремата за конволюцията, като се използва само синус-преобразуване. Нека функцията  $h(t)$  е дефинирана по следния начин

$$h(t) = \int_0^\omega g(\tau) d\tau. \quad (4.2.24)$$

Функцията  $g(t)$  трябва да удовлетворява условието, че е абсолютно интегрируема в интервала  $[0, \infty)$ , така че КПФ за  $h(t)$  съществува. Ще припомним от (4.2.26), че

$$H_c(\omega) = (1/\omega) G_c(\omega). \quad (4.3.25)$$

Като приложим (4.3.22) за  $f(t)$  и  $h(t)$  получаваме веднага

$$(2/\omega) F_s(\omega) G_c(\omega) = F_s \left[ \int_0^\omega f(\tau) \int_{|\tau|}^{t+\tau} g(\eta) d\eta d\tau \right], \quad (4.3.26)$$

където  $g(t) = -h'(t)$ .

### 4.3.3. Синус-преобразуване на Фурье за някои често срещани функции

#### 4.3.3.1. СПФ на алгебрични функции

1. Единична правоъгълна функция:

$$f(t) = U(t) - U(t-a),$$

където  $U(t)$  е функцията единичен скок на Хевисайд.

$$F_s[f(t)] = \int_0^\omega \sin \omega t dt = (1 - \cos \omega a)/\omega. \quad (4.3.27)$$

2. Функция тип "палатка" с височина единица:

$$f(t) = \begin{cases} t/a & \text{за } 0 < t < a, \\ (2a-t)/a & \text{за } a < t < 2a, \\ 0 & \text{за други стойности на } t. \end{cases}$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^a \left( \frac{t}{a} \right) \sin \omega t dt + \int_a^{2a} \left( \frac{2a-t}{a} \right) \sin \omega t dt = \frac{1}{a\omega^2} [2 \sin a\omega - \sin 2a\omega]. \quad (4.3.28)$$

3. Реципрочно закъснение:

$$f(t) = (1/t)U(t-a).$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty \left( \frac{1}{t} \right) \sin \omega t dt = \int_0^\infty \left( \frac{1}{\tau} \right) \sin \omega \tau d\tau = -Si(a\omega), \quad (4.3.29)$$

където  $Si(x)$  е функцията интегрален синус, дефинирана с (4.2.39).

4. Реципрочен квадратен корен:

$$f(t) = 1/\sqrt{t}.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \sin \omega t dt = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}. \quad (4.3.30)$$

5. Реципрочна линейна функция:

$$f(t) = (\alpha + t)^{-1}, \quad |\arg \alpha| < \pi.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty \frac{1}{(\alpha + t)} \sin \omega t dt = \sin \omega \alpha Ci(\omega \alpha) - \cos \omega \alpha Si(\omega \alpha). \quad (4.3.31)$$

Тук  $Ci(x)$  е функцията интегрален косинус, дефинирана с (4.2.36).

6. Реципрочни квадратни функции:

$$a) \quad f(t) = (t^2 + a^2)^{-1}, \quad a > 0.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty \frac{1}{t^2 + a^2} \sin \omega t dt = \frac{1}{2a} [e^{-a\omega} \bar{Ei}(a\omega) - e^{a\omega} Ei(-a\omega)], \quad (4.3.32)$$

където  $Ei(x)$  и  $\bar{Ei}(x)$  са функциите интегрална експонента, дефинирани с (4.2.50). Ще отбележим, че (4.3.32) е свързана с КПФ на функцията

$$f(t) = -t(t^2 + a^2)^{-1},$$

ако се вземе предвид производната на (4.3.32).

Така

$$F_S[-t(t^2 + a^2)^{-1}] = (1/2) [e^{-a\omega} \bar{Ei}(a\omega) + e^{a\omega} Ei(-a\omega)]. \quad (4.3.33)$$

$$b) \quad f(t) = (a^2 - t^2)^{-1}, \quad a > 0.$$

$$F_S[f(t)] = P.V. \int_0^\infty [(a^2 - t^2)^{-1} \sin \omega t dt] = [\sin a\omega Ci(a\omega) + \cos a\omega Si(a\omega)]/a, \quad (4.3.34)$$

където  $Ci(x)$  и  $Si(x)$  са функциите интегрален косинус и синус, дефинирани с (4.2.36) и (4.2.39), а "P.V." означава "главна стойност" на интеграла. Отново ще отбележим, че (4.3.34) е свързана с КПФ на функцията:

$$f(t) = -t(a^2 - t^2)^{-1}.$$

Така

$$F_c[-t(a^2 - t^2)^{-1}] = \cos a\omega Ci(a\omega) + \sin a\omega Si(a\omega). \quad (4.3.35)$$

$$a) \quad f(t) = \frac{\beta}{\beta^2 + (a-t)^2} - \frac{\beta}{\beta^2 + (a+t)^2}, \quad \operatorname{Re} \beta > 0.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty \left[ \frac{\beta}{\beta^2 + (a-t)^2} - \frac{\beta}{\beta^2 + (a+t)^2} \right] \sin \omega t dt = \pi \sin a\omega e^{-\beta a}. \quad (4.3.36)$$

$$z) \quad f(t) = \frac{a+t}{\beta^2 + (a+t)^2} - \frac{a-t}{\beta^2 + (a-t)^2}, \quad \operatorname{Re} \beta > 0.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty \left[ \frac{a+t}{\beta^2 + (a+t)^2} - \frac{a-t}{\beta^2 + (a-t)^2} \right] \sin \omega t dt = \pi \sin a\omega e^{-\beta a}. \quad (4.3.37)$$

Ще отбележим симетрията между преобразуванията (4.3.36), (4.3.37) и (4.2.43), (4.2.42).

#### 4.3.3.2. СПФ на експоненциални и логаритмични функции

$$1. \quad f(t) = e^{-at}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty e^{-at} \sin \omega t dt = \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad (4.3.38)$$

което е лапласовото преобразуване на  $\sin \omega t$ .

$$2. \quad f(t) = \frac{e^{-\beta t} - e^{-at}}{t^2}, \quad \operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > 0.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty \frac{e^{-\beta t} - e^{-at}}{t^2} \sin \omega t dt = \frac{\omega}{2} \ln \left( \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\beta^2 + \omega^2} \right) + \alpha \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha} - \beta \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\beta}. \quad (4.3.39)$$

Формула (4.3.39) е свързана с (4.2.45). Необходимо е да се използва свойството диференциране в честотната област на синус-преобразуването, дефинирано в (4.3.18).

$$3. \quad f(t) = te^{-at^2}, \quad \arg(\alpha) < \pi/2.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty t e^{-at^2} \sin \omega t dt = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} \omega e^{-\omega^2/4\alpha}, \quad (4.3.40)$$

която формула е свързана също с косинус-преобразуването (4.2.46) като се използва отново диференциране в честотната област, дадено с (4.3.18) за синус-преобразуването.

$$4. \quad f(t) = \operatorname{Int}[1 - U(t-1)].$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty \operatorname{Int}[1 - U(t-1)] \sin \omega t dt = -\frac{1}{\omega} [C + \ln \omega - O(\omega)], \quad (4.3.41)$$

където е извършено интегриране по части. Тук  $C=0,5772156649\dots$  е константа на Ойлер, а  $Ci(x)$  е функцията на интегралния косинус.

$$5. \quad f(t) = \frac{t \ln bt}{(t^2 + a^2)}, \quad a, b > 0.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty \frac{t \ln bt}{(t^2 + a^2)} \sin \omega t dt = \frac{\pi}{4} [2e^{-\alpha\omega} \ln(ab) + e^{\alpha\omega} Ei(-a\omega) - e^{-\alpha\omega} \bar{Ei}(a\omega)]. \quad (4.3.42)$$

Ще отбележим, че (4.3.42) е свързана с (4.2.49) чрез диференциране в честотната област на КПФ, дефинирано с (4.2.24).

$$6. \quad f(t) = \ln \left| \frac{t+a}{t-a} \right|, \quad a > 0.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty \ln \left| \frac{t+a}{t-a} \right| \sin \omega t dt = \frac{\pi}{\omega} \sin a\omega. \quad (4.3.43)$$

Този резултат е получен като се интегрира по части и се използват свойствата преместване във времевата област (4.3.11) – (4.3.13) на синус преобразуването.

#### 4.3.3.3. СПФ на тригонометрични функции

$$1. \quad f(t) = \frac{\sin at}{t}, \quad a > 0.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty \frac{\sin at}{t} \sin \omega t dt = (1/2) \ln \left| \frac{\omega + a}{\omega - a} \right|. \quad (4.3.44)$$

Този резултат се получава веднага, ако се сравни с (4.3.43) и се вземе предвид нормирането, използвано в (4.3.1) и (4.3.2) за дефиницията на СПФ.

$$2. \quad f(t) = \frac{e^{-\beta t}}{t} \sin \alpha t, \quad \operatorname{Re}(\beta) > |\operatorname{Im}(\alpha)|.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty \frac{e^{-\beta t}}{t} \sin \alpha t \sin \omega t dt = \frac{1}{4} \ln \left[ \frac{\beta^2 + (\omega + \alpha)^2}{\beta^2 + (\omega - \alpha)^2} \right]. \quad (4.3.45)$$

Този резултат се получава лесно, ако се използва свойството интегриране в честотната област (4.2.27) за КПФ на (4.2.53).

$$3. \quad f(t) = e^{-\beta t} \cos \alpha t, \quad \operatorname{Re}(\beta) > |\operatorname{Im}(\alpha)|.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty e^{-\beta t} \cos \alpha t \sin \omega t dt = \left( \frac{1}{2} \right) \left[ \frac{\omega - \alpha}{\beta^2 + (\omega - \alpha)^2} + \frac{\omega + \alpha}{\beta^2 + (\omega + \alpha)^2} \right], \quad (4.3.46)$$

а това е лапласовото преобразуване на функцията  $\cos \alpha t \sin \omega t$ .

$$4. \quad f(t) = \frac{t \cos at}{(t^2 + \beta^2)}, \quad a, \operatorname{Re}(\beta) > 0.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty \frac{t \cos at}{(t^2 + \beta^2)} \sin \omega t dt = -\frac{\pi}{2} e^{-\beta a} \sinh \beta \omega \quad \text{ако } \omega < a, \\ = \frac{\pi}{2} e^{-\beta a} \cosh a \beta \quad \text{ако } \omega > a. \quad (4.3.47)$$

Ще отбележим симетрията на (4.3.47) и (4.2.55).

$$5. \quad f(t) = \frac{\sin at}{(t^2 + \beta^2)}, \quad a, \operatorname{Re}(\beta) > 0.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty \frac{t \sin at}{(t^2 + \beta^2)} \sin \omega t dt = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta a} \sinh \beta \omega \quad \text{ако } \omega < a, \\ = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta a} \sinh a \beta \quad \text{ако } \omega > a. \quad (4.3.48)$$

Съществува симетрия между (4.3.48) и (4.2.56).

$$6. \quad f(t) = e^{-\beta t^2} \sin at, \quad \operatorname{Re}(\beta) > 0.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty e^{-\beta t^2} \sin at \sin \omega t dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-(\omega^2 + a^2)/4\beta} \sinh \frac{a\omega}{2\beta}. \quad (4.3.49)$$

Тази формула е подобна на (4.2.57) за косинус-преобразуването.

#### 4.3.3.4. СПФ за ортогонални полиноми

1. Полиноми на Лежандър, дефинирани с (4.2.58):

$$f(t) = P_n(1 - 2t^2)[1 - U(t-1)] \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^1 P_n(1 - 2t^2) \sin \omega t dt = \frac{\pi}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left( \frac{\omega}{2} \right)^n \right]^2. \quad (4.3.50)$$

2. Полином на Чебишел, дефиниран с (4.2.59):

$$f(t) = (a^2 - t^2)^{-1/2} T_{2n+1}(t/a)[1 - U(t-a)], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^a (a^2 - t^2)^{-1/2} T_{2n+1}(t/a) \sin \omega t dt = (-1)^n \left( \frac{\pi}{2} \right) J_{2n+1}(a\omega). \quad (4.3.51)$$

3. Полиноми на Лагер:

$$f(t) = t^{2m} e^{-t^2/2} L_n^{2m+1}(t^2), \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty t^{2m} e^{-t^2/2} L_n^{2m+1}(t^2) \sin \omega t dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (n!)^{-1} (-1)^m e^{-\omega^2/2} H_{2n}(a\omega) H_{n+2m+1}(a\omega), \quad (4.3.52)$$

Където  $L_n^a(x) = \frac{\Theta^a x^{-a}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+a})$  е полиномът на Лагер ( $L_n^0(x) = L_n(x)$ ), дефиниран с (4.2.60). Тук  $H_{2n}(x)$  е полиномът на Ермит, дефиниран с (4.2.61).

4. Полиноми на Ермит, дефинирани с (4.2.62):

$$a) \quad f(t) = e^{-t^2/2} H_{2n+1}(\sqrt{2}t).$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty e^{-t^2/2} H_{2n+1}(\sqrt{2}t) \sin \omega t dt = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega^2/2} H_{2n+1}(\sqrt{2}\omega). \quad (4.3.53)$$

#### 4.3.3.5. СПФ на някои специални функции

1. Функция на допълнителната грешка, дефинирана с (4.2.63):

$$f(t) = \operatorname{Erfc}(at), \quad a > 0.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty \operatorname{Erfc}(at) \sin \omega t dt = \frac{1}{\omega} [1 - e^{-a^2/4a^2}] \quad (4.3.54)$$

2. Функцията интегрален синус, дефинирана с (4.2.39):

$$f(t) = si(at), \quad a > 0,$$

$$\begin{aligned} F_S[f(t)] &= \int_0^\infty si(at) \sin \omega t dt = 0 & 0 \leq \omega < a \\ &= -\frac{\pi}{2\omega} & \omega > a. \end{aligned} \quad (4.3.55)$$

Ще отбележим симетрията между (4.3.55) и (4.2.65).

3. Функцията интегрален косинус, дефинирана с (4.2.36):

$$f(t) = Ci(at) = -ci(at), \quad a > 0,$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty Ci(at) \sin \omega t dt = \frac{1}{2\omega} \ln \left| \frac{\omega^2}{a^2} - 1 \right|. \quad (4.3.56)$$

4. Функцията интегрална експонента, дефинирана с (4.2.66):

$$f(t) = Ei(-at), \quad a > 0,$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty Ei(-at) \sin \omega t dt = -\frac{1}{2\omega} \ln \left( \frac{\omega^2}{a^2} + 1 \right). \quad (4.3.57)$$

5. Беселови функции, дефинирани с (4.2.58):

$$a) \quad f(t) = J_0(at), \quad a > 0.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty J_0(at) \sin \omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{за } 0 < \omega < a, \\ (\omega^2 - a^2)^{-1/2} & \text{за } \omega > a. \end{cases} \quad (4.3.58)$$

$$b) \quad f(t) = J_{2n+1}(at), \quad a > 0.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty J_{2n+1}(at) \sin \omega t dt = \begin{cases} (-1)^n (\omega^2 - a^2)^{-1/2} T_{2n+1}(\omega/a), & \text{за } 0 < \omega < a, \\ 0, & \text{за } \omega > a. \end{cases} \quad (4.3.59)$$

$$b) \quad f(t) = t^{-n} J_{n+1}(at), \quad a > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty t^{-n} J_{n+1}(at) \sin \omega t dt = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+1/2)} \frac{1}{a^{n+1}} \omega (a^2 - \omega^2)^{n-1/2} & \text{за } 0 < \omega < a, \\ 0 & \text{за } \omega > a, \end{cases} \quad (4.3.60)$$

Където  $T_n(x)$  е полиномът на Чебишев, дефиниран с (4.2.59).

$$r) \quad f(t) = Y_0(at), \quad a > 0,$$

Където  $Y_0(x)$  е Беселова функция от втори тип (вж. 4.2.70).

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty Y_0(at) \sin \omega t dt = \begin{cases} \frac{2}{\pi} (a^2 - \omega^2)^{-1/2} \arcsin \left( \frac{\omega}{a} \right) & \text{за } 0 < \omega < a, \\ \frac{2}{\pi} (\omega^2 - a^2)^{-1/2} \ln \left| \frac{\omega}{a} - \left( \frac{\omega^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} \right| & \text{за } \omega > a. \end{cases} \quad (4.3.61)$$

$$d) \quad f(t) = t^\nu Y_{\nu-1}(at), \quad |\operatorname{Re}(\nu)| < 1/2, a > 0.$$

$$F_S[f(t)] = \int_0^\infty t^\nu Y_{\nu-1}(at) \sin \omega t dt = \begin{cases} \frac{2^\nu a^{\nu-1} \sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2 - \nu)} \omega (\omega^2 - a^2)^{\nu-1/2} & \text{за } \omega > a, \\ 0 & \text{за } 0 < \omega < a. \end{cases} \quad (4.3.62)$$

#### 4.4. Дискретно синус и косинус преобразуване (ДСП и ДКП)

В практическите приложения пресмятането на синус и косинус преобразуване се извършва с дискретни данни на сигнали с крайна дължина. Тъй като данните са с крайна дължина и дискретни по природа, налага се предположението, че съществуват дискретни синус и косинус преобразувания, подобно на БПФ, които биха ускорили изчислителния процес. В този раздел даваме дефинициите и свойствата на тези два вида преобразувания. Съществуват четири вида ДКП и толкова на бой ДСП. Тук се разглежда по-подробно тип I на двите преобразувания. Те се дефинират чрез просто дискретизиране на СПФ и КПФ, когато областта е правоъгълен прозорец с височина единица.

##### 4.4.1. Дефиниции на ДКП и ДСП. Връзка между СПФ и КПФ

Нека ядрото на преобразуването на КПФ е

$$K_c(\omega t) = \cos \omega t \quad (4.4.1)$$

и освен това  $\omega_m = 2\pi m \Delta t$  и  $t_n = n \Delta t$  са съответно дискретната ъглова честота и дискретното време. Тук  $\Delta t$  и  $\Delta t$  са съответно интервалите на дискретизиране за честотата и времето, а  $m$  и  $n$  са положителни цели числа. Ядрото от (4.4.1) може да бъде дискретизирано по следния начин

$$K_c(m, n) = K_c(\omega_m, t_n) = \cos(2\pi m n \Delta t). \quad (4.4.2)$$

Ако приемем оттук нататък  $\Delta t \Delta t = 1/(2N)$ , където  $N$  е цяло положително число, получаваме ядрото на дискретното косинус преобразуване:

$$K_c(m, n) = \cos(\pi m n / N), \quad (4.4.3)$$

Където  $m, n = 0, 1, \dots, N$ . Ядрото на преобразуване в (4.4.3) е ядро на ДКП от тип I. То представлява елементът  $c_{mn}$  на матрицата на преобразуване  $[C]$ , която е от вида  $(N+1) \times (N+1)$ . Тези елементи са

$$[C]_{mn} = \frac{2}{N} \left\{ k_m k_n \cos \left( \frac{m n \pi}{N} \right) \right\}, \quad m, n = 0, 1, \dots, N,$$

където

$$k_i = \begin{cases} 1 & \text{за } i \neq 0 \text{ или } N, \\ 1/\sqrt{2} & \text{за } i = 0 \text{ или } N, \end{cases}$$

и  $\sqrt{2/N}$  е нормиращ коефициент.

Дискретизирането може да бъде разглеждано като процес, при който

времевият интервал с крайна дължина се дели на  $N$  подинтервала, всеки с широчина  $\Delta t$ . Ако се включат граничните точки, трябва да се разглеждат  $N+1$  дискретни точки. Те могат да бъдат разглеждани като компоненти на вектора  $\vec{x}$ . ДКП на този вектор е векторът  $\vec{X}$ , дефиниран по следни начин

$$\vec{X} = [C]\vec{x}, \quad (4.4.5)$$

които представен във вида "елемент по елемент" изглежда така

$$\vec{X}_c(m) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^N k_m k_n \cos\left(\frac{mn\pi}{N}\right) \vec{x}(n). \quad (4.4.6)$$

Може да се покаже, че  $[C]$  е унитарна матрица. Обратното преобразуване се дефинира по следния начин

$$\vec{x}(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{m=0}^N k_m k_n \cos\left(\frac{mn\pi}{N}\right) \vec{X}_c(m). \quad (4.4.7)$$

Векторите  $\vec{X}_c$  и  $\vec{x}$  образуваат двойка на ДКП.

Подобни разглеждания могат да се направят за дискретизирането на ядрото при СПФ

$$K_s(\omega, t) = \sin \omega t, \quad (4.4.8)$$

които водят до дефинирането на матрицата на преобразуването за ДСП. Тя е квадратна матрица от вида  $(N-1)x(N-1)$  с елементи

$$[S]_{mn} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{mn\pi}{N}\right), \quad m, n = 0, 1, \dots, N. \quad (4.4.9)$$

Тази матрица е също унитарна и когато се приложи към вектора на входните данни  $\vec{x}$  с дължина  $(N-1)$ , се получава преобразуваният вектор  $\vec{X}_s$ , на който елементите се определят по формулата

$$\vec{X}_s(m) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{mn\pi}{N}\right) \vec{x}(n). \quad (4.4.10)$$

Векторите  $\vec{x}$  и  $\vec{X}_s$  образуваат двойка на ДСП. Обратното ДСП се дефинира с формулата

$$\vec{x}(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{m=1}^{N-1} \sin\left(\frac{mn\pi}{N}\right) \vec{X}_s(m). \quad (4.4.11)$$

От (4.4.7) и (4.4.11) е очевидно, че ДКП и ДСП са симетрични преобразувания. Двете са получени чрез дискретизиране на краен времеви интервал на  $N$  еднакви подинтервала, всеки с дължина  $\Delta t$ , при което се получава матрицата  $[C]$  от вида  $(N+1)x(N+1)$ , тъй като граничните елементи не са нула, и матрица  $[S]$  от вида  $(N-1)x(N-1)$ , тъй като граничните елементи са нула.

#### 4.4.2. Основни свойства и правила

##### 4.4.2.1. Свойството унитарност

Нека  $\vec{c}_m$  е  $m$ -мерен вектор-колона в матрицата  $[C]$ . Да разгледаме скалярното произведение на два такива вектора

$$\langle \vec{c}_m, \vec{c}_n \rangle = \sum_{p=0}^N k_m k_p \cos\left(\frac{mp\pi}{N}\right) k_p k_n \cos\left(\frac{pn\pi}{N}\right). \quad (4.4.12)$$

Сумирането може да бъде извършено, ако се дефинира 2N-ият промеждивен корен на единицата по следния начин

$$W_{2N} = e^{-j\pi/N} = \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{N}\right), \quad (4.4.13)$$

и приложим тази формула при сумирането в (4.4.12). Получава се

$$\langle \vec{c}_m, \vec{c}_n \rangle = \left( \frac{k_m k_n}{N} \right) \operatorname{Re} \left[ \sum_{p=0}^{N-1} W_{2N}^{-p(n-m)} + \sum_{p=1}^N W_{2N}^{-p(-n+m)} \right], \quad (4.4.14)$$

където  $\operatorname{Re}[\cdot]$  означава реалната част на  $[\cdot]$ .

Да разгледаме първото сумиране в (4.4.14) и да заместим  $k=(n-m)$ . Степенният ред може да бъде записан по следния начин:

$$\sum_{p=0}^{N-1} (W_{2N}^{-k})^p = \frac{(1 - W_{2N}^{-Nk})}{(1 - W_{2N}^{-k})} = \{2[1 - \cos(k\pi/N)]\}^{-1} \{1 - W_{2N}^{-Nk} - W_{2N}^{-k} + W_{2N}^{-(N-1)k}\}. \quad (4.4.15)$$

По подобен начин, вторият ред в (4.4.14) може да бъде сумиран, ако заместим  $\lambda=(n+m)$ ,

$$\sum_{p=1}^N (W_{2N}^{-\lambda})^p = \{2[1 - \cos(\lambda\pi/N)]\}^{-1} \{W_{2N}^{-\lambda} - W_{2N}^{-(N+1)\lambda} - 1 + W_{2N}^{-N\lambda}\}. \quad (4.4.16)$$

Тук за  $n \neq m$  ( $k \neq 0$ ) реалната част на (4.4.15) е

$$\operatorname{Re} \left[ \sum_{p=0}^{N-1} (W_{2N}^{-k})^p \right] = \frac{[1 - (-1)^k][1 - \cos(k\pi/N)]}{[2[1 - \cos(k\pi/N)]]} = [1 - (-1)^k]/2,$$

а реалната част на (4.4.16) е

$$\operatorname{Re} \left[ \sum_{p=1}^N (W_{2N}^{-\lambda})^p \right] = -\frac{[1 - (-1)^\lambda][1 - \cos(\lambda\pi/N)]}{[2[1 - \cos(\lambda\pi/N)]]} = -[1 - (-1)^\lambda]/2.$$

Ако комбинираме тези две формули и вземем предвид, че  $k$  и  $\lambda$  се различават с  $2m$ , получаваме свойството ортогоналност за скаларното произведение,

$$\langle \vec{c}_m, \vec{c}_n \rangle = 0 \quad \text{за } m \neq n. \quad (4.4.17)$$

За  $m=n \neq 0$  или  $N$ , скаларното произведение е

$$\langle \vec{c}_m, \vec{c}_n \rangle = \left( \frac{1}{N} \right) \operatorname{Re} \left[ \sum_{p=0}^{N-1} 1 + \sum_{p=1}^N (W_{2N}^{-2m})^p \right] = 1,$$

а за  $m=n=0$  или  $N$ , скаларното произведение е

$$\langle \vec{c}_m, \vec{c}_n \rangle = \left( \frac{1}{N} \right) \operatorname{Re} \left[ \sum_{p=0}^{N-1} 1 + \sum_{p=1}^N 1 \right] = 1.$$

Следователно, скаларното произведение удовлетворява условието за ортогоналност

$$\langle \vec{c}_m, \vec{c}_n \rangle = \delta_{mn}, \quad (4.4.18)$$

където  $\delta_{mn}$  е делта-функцията на Кронекер и по този начин показахме, че матрицата  $[C]$  на ДКП е унитарна.

Подобни разглеждания могат да бъдат направени за матрицата  $[S]$  на ДСП. Тя също е унитарна.

#### 4.4.2.2. Обратно преобразуване

В т.4.4.1 беше отбелоязано, че унитарните матрици  $[C]$  и  $[S]$  са симетрични и поради това обратните преобразувания са същите, както правите преобразувания, основаващи се на свойството унитарност. Тогава

$$[C]^{-1} = [C] \quad \text{и} \quad [S]^{-1} = [S]. \quad (4.4.19)$$

#### 4.4.2.3. Машабиране

Припомняме, че при дискретизирането на КПФ, времевият и честотният интервал са свързани по следния начин

$$\Delta f \Delta t = 1/2N \quad \text{или} \quad \Delta f = 1/2N \Delta t. \quad (4.4.20)$$

Тъй като ДКП и ДСП се основават на дискретните точки на отчетите, машабирането на времето няма влияние върху преобразуването с изключение на изменението на елементарния честотен интервал в областта на преобразуването. Тогава, когато  $\Delta t$  се променя до  $a \Delta t$ , то  $\Delta f$  се променя до  $\Delta f/a$ , ако броят на деленията  $N$  остава непроменен. Поради това свойствата (4.2.16) и (4.3.10) за КПФ и СПФ не се променят, с изключение на множителя  $1/a$ , който липсва в случаите на ДКП и ДСП.

Формула (4.4.20) може също да бъде тълкувана, ако честотата се раздели на множеството от дискретни точки, дискретизирани с времеви интервал  $\Delta t$ . Ако  $T=N \Delta t$  е дължината на редицата от данни, разрешаващата способност на честотата за преобразуванията е

$$\Delta f = 1/2T. \quad (4.4.21)$$

#### 4.4.2.4. Преместване във времето

Тъй като се работи с дискретни данни, ще получим свойството преместване във времето за ДКП и ДСП, чрез разглеждане на това преместване в кратни единици на  $\Delta t$ . Ако  $\bar{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N)]^T$ , ще дефинираме понятието преместена надясно редица като  $\bar{x}^+ = [x(1), x(2), \dots, x(N+1)]^T$ .

Съответното ДКП се определя по следния начин

$$\bar{X}_c = [C]\bar{x} \quad \text{и} \quad \bar{X}_c^+ = [C]\bar{x}^+. \quad (4.4.22)$$

Свойството преместване във времето установява връзката между  $\bar{X}_c$  и  $\bar{X}_c^+$ , а оттам и с  $\bar{X}_s$  - ДКП на  $\bar{x}$ . Това трябва и да се очаква, тъй като свойствата преместване във времето за КПФ и СПФ са тясно свързани. Може да бъде показано, че елементите на вектора  $\bar{X}_c^+$  се дефинират по следния начин

$$\begin{aligned} \bar{X}_c^+ &= \cos\left(\frac{m\pi}{N}\right)\bar{X}_c(m) + k_m \sin\left(\frac{m\pi}{N}\right)\bar{X}_s(m) + \\ &+ \sqrt{\frac{1}{N}}k_m + \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{m\pi}{N}\right)x(0) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)x(1) + \right. \\ &\left. + (-1)^m \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\cos\left(\frac{m\pi}{N}\right)x(N) + (-1)^m \frac{1}{\sqrt{2}}x(N+1)\right]. \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

Където  $X_c(m)$  и  $X_s(m)$  са съответно  $m$ -ия елемент на вектора

$[x(0), x(1), \dots, x(N)]^T$  на ДКП и  $m$ -ия елемент на вектора  $[x(1), x(2), \dots, x(N+1)]^T$  на ДСП. Съответният резултат за ДСП е

$$\begin{aligned} X_s^+(m) &= \cos\left(\frac{m\pi}{N}\right)X_s(m) - \sin\left(\frac{m\pi}{N}\right)X_c(m) + \\ &+ \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{m\pi}{N}\right) \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}x(0) - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(-1)^m x(N) \right]. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

където  $X_c(m)$  са елементите на ДКП на вектора  $[x(0), x(1), \dots, x(N)]^T$ .

#### 4.4.2.5. Свойството разлика

При дискретните редици, операторът разлика замества операторът диференциал за непрекъснати редици. КПФ и СПФ на производна, следователно, са аналог на ДКП и ДСП на оператора разлика. Векторът разлика  $\bar{d}$  може да се дефинира по следния начин

$$\bar{d} = \bar{x}^+ - \bar{x}, \quad (4.4.25)$$

където  $\bar{x}^+$  е преместена надясно версия на  $\bar{x}$ . Очевидно е, че ДКП и ДСП на  $\bar{d}$  се дават по следния начин

$$\bar{D}_c = \bar{X}_c^+ - \bar{X}_c \quad \text{и} \quad \bar{D}_s = \bar{X}_s^+ - \bar{X}_s. \quad (4.4.26)$$

От (4.4.26) се вижда, че основното предимство на КПФ и СПФ е, че свойството диференциране не се запазва в дискретния случай. Също така, двете свойства интегриране по време и интегриране по честота не се запазват в дискретния случай.

В заключение ще отбележим, че не съществуват прости конволюционни свойства в случаите на ДКП и ДСП. За крайни редици е възможно да се дефинира кръгова конволюция за две периодични редици или линейна конволюция на две непериодични редици.

#### 4.4.3. Връзка между ДКП и ДСП с Карунен-Лоев – преобразуването (КЛП)

Карунен-Лоев – преобразуването е оптимално преобразуване на цифрови сигнали. То диагонализира автокорелационната матрица на вектора на данните и по този начин напълно декорелира сигнала в преобразуваната област, минимизирайки средноквадратичната грешка (СКГ) при компресия на данните и обединява най-богатите на енергия (дисперсия) от тях в най-малко на брой кофициенти на преобразуването.

Да разгледаме сигнала Марков-1 с кофициент на корелация  $\rho$ . Матрицата  $[A]$  от ред  $N \times N$  е ковариационната матрица. Тя е реална симетрична от търпликов вид. Известно е, че неособената симетрична матрица на Търпликов има за обратна матрица тридиагонална матрица. В случая на ковариантната матрица  $[A]$  за сигнала Марков-1, можем да запишем

$$[A]^{-1} = (1 - \rho^2)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\rho & 1 + \rho^2 & -\rho & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -\rho & 1 + \rho^2 & -\rho & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4.27)$$

Матрицата може да бъде декомпозирана на сума от две по-прости матрици

$$[A]^T = [B] + [R].$$

където

$$[B] = (1 - \rho^2) \begin{pmatrix} 1 + \rho^2 & -\sqrt{2}\rho & 0 & - & - \\ -\sqrt{2}\rho & 1 + \rho^2 & -\rho & - & - \\ - & - & - & -\sqrt{2}\rho & 1 + \rho^2 \\ - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

и

$$[R] = (1 - \rho^2)^{-1} \begin{pmatrix} -\rho^2 & (\sqrt{2}-1)\rho & 0 & - & - \\ (\sqrt{2}-1)\rho & 0 & 0 & - & - \\ - & - & - & 0 & (\sqrt{2}-1)\rho \\ - & - & - & -(\sqrt{2}-1)\rho & -\rho^2 \end{pmatrix}. \quad (4.4.23)$$

Ще отбележим, че  $[R]$  е почти празна матрица и не е препятствие това, че  $N$  може да бъде голямо число. Тогава диагонализирането на матрицата  $[B]$  е приблизително еквивалентно на диагонализирането на матрицата  $[A]$ . Освен това, известно е, че преобразуването но подобието, което диагонализира  $[A]^T$  ще диагонализира също и матрицата  $[A]$ . От тези съображения може да се заключи, че преобразуването, което диагонализира  $[B]$  ще диагонализира приблизително  $[A]$ . Преобразуването, което диагонализира  $[B]$  зависи от тричленна рекурентна връзка, която се удовлетворява точно от полиномите на Чебищев. При тези условия, може да се покаже, че матрицата  $[V]$ , която ще диагонализира  $[B]$ , а оттам също и  $[A]$  асимптотично, се дефинира по следния начин

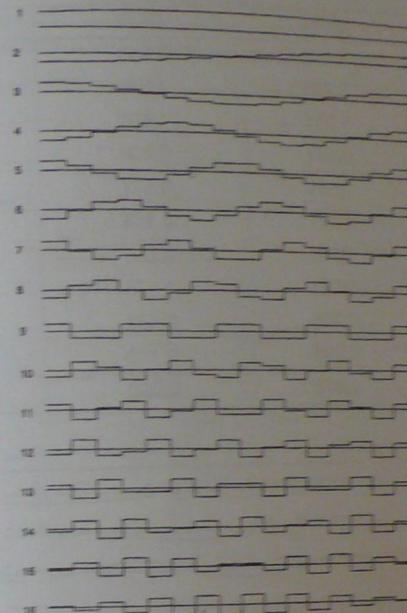
$$[V]_{mn} = k_m k_n \sqrt{\frac{2}{N-1}} \cos\left(\frac{m n \pi}{N-1}\right), \quad m, n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.4.29)$$

Както беше показано в (4.4.29), това са елементите на матрицата  $[C]$  на ДКП с тази разлика, че  $N$  трябва да бъде заменен с  $N-1$ . Те са еднакви за големи стойности на  $N$ .

Коданото по-горе демонстрира накратко факта, че за сигнала Марков-1, диагонализирането на ковариантната матрица, което води до КЛП, се реализира чрез матрицата на преобразуването  $[V]$ , което е почти същото за ДКП с матрицата  $[C]$ . Това обяснява защо ДКП реализира декорелацията на сигнал, въпреки че сигналът е независим. Подробни разъждения могат да се направят за ДСП.

На фиг. 4.1 са показани базисните функции, които образуваат КЛП за  $N=16$ . Сигналът е сигналът Марков-1 с коефициент на корелация  $\rho=0.9$ . Вижда се, че множеството на базисните функции, а оттук и КЛП е зависим сигнал, като та са собствените вектори на автоковариантната матрица на вектора на сигнала.

На фиг. 4.2 и фиг. 4.3 са показани базисните функции на ДКП и ДСП за  $N=16$ . Очевидно е, че те са много близки до базисните функции на КЛП. Това е вярно за случая, когато размерите на пространствата, в които действат КЛП и ДКП и ДСП са различни. Може да бъде показано, че когато  $N$  нараства, двете дискретни преобразувания приближават асимптотично КЛП.



Фиг. 4.1. Сигналът Марков-1, обработен с КЛП за  $\rho=0.95$ ;  $N=16$

Върно е обаче, че подобието на базисните функции не гарантира асимптотичното поведение на ДКП и ДСП, нито осигурява добро преобразуване. В приложенията, такива като компресия на данни и преобразуване на областта на кодиране, "дисперсиите на разпределението" на коефициентите на преобразуването е важен критерий на реализациите. Дисперсиите на коефициентите на преобразуването е основна мярка за информационното съдържание на тези коефициенти. Ето защо, колкото е по-голяма дисперсиите в никак от коефициентите на преобразуването, толкова по-голяма камера ще има в компресията на данните в тази област на преобразуването.

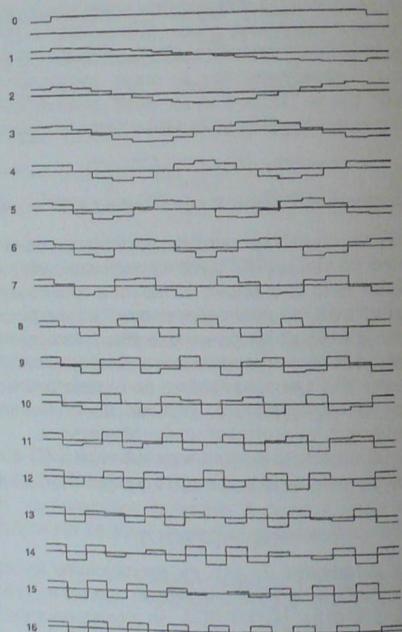
Нека  $[A]$  е ковариантната матрица на данните и  $[T]$  е преобразуването. Тогава, ковариантната матрица в областта на преобразуване  $[A]_T$  се определя с формулата

$$[A]_T = [T] [A] [T]^T. \quad (4.4.30)$$

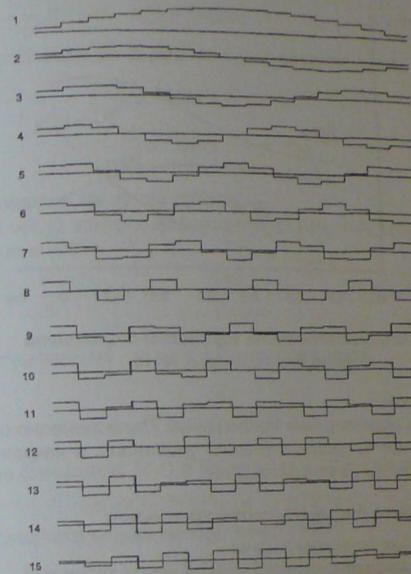
Диагоналните елементи на  $[A]_T$  са дисперсиите на коефициентите на преобразуването. В Таблица 4.1 е направено сравнение между дисперсиите на разпределението за ДКП, ДСП и ДПФ, за случая на сигнал Марков-1 при  $\rho=0.95$  и  $N=16$ . Лесно може да се види, че ДКП и ДСП превъзхождат ДПФ при използването на разпределението на дисперсиите в ролята на критерий за качеството на реализирането.

Таблица 4-1. Разпределения на дисперсията за  $N=16$ ,  $\rho=0,9$

$i$	ДКП-II	ДСП	ДПФ
0	9,835	9,218	9,835
1	2,933	2,640	1,834
2	1,211	1,468	1,834
3	0,581	0,709	0,519
4	0,348	0,531	0,519
5	0,231	0,314	0,250
6	0,166	0,263	0,250
7	0,129	0,174	0,155
8	0,105	0,153	0,155
9	0,088	0,110	0,113
10	0,076	0,099	0,113



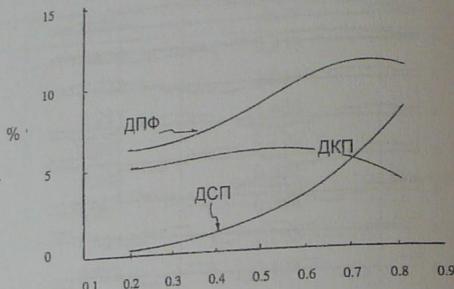
Фиг. 4.2. Сигналът Марков-1, обработен с ДКП за  $N=16$



Фиг. 4.3. Сигналът Марков-1, обработен с ДСП за  $N=16$

Ако преобразуването  $[T]$  в (4.4.30) не е КЛП, матрицата  $[A]_T$  няма да бъде диагонална. Нулевите елементи, лежащи извън диагонала на  $[A]_T$  служат като мярка за "остатъчна корелация". Колкото по-малка е остатъчната корелация, толкова преобразуването е по-близо до оптималното. На фиг. 4.4 са показани остатъчните корелации като проценти от общата корелация за различните преобразувания ДКП, ДСП и ДПФ за сигнала Марков-1, когато  $N=16$ . Както може да се види, отново ДКП и ДСП превъзхождат ДПФ във всяко отношение.

Съществуват и други критерии за оценка на качеството на дадено преобразуване, които зависят от това какъв вид обработка на сигнала ще се прави. Ако се използва КЛП като база за сравнение, ДКП и ДСП са много добри, тъй като сигналът е независим. Освен това те са подходящи за бързи преобразувания, т.е. лесно се реализират БКП и БСП. И двете преобразувания са асимптотично близки до КЛП. Това качество на дискретните тригонометрични преобразувания (особено ДКП) ги прави много подходящи за цифрова обработка на сигналите. Въпреки че те са подоптимални, в смисъл, че не диагонализират точно ковариационната матрица на данните, те са независими от сигнала и са лесно изчислими, тъй като използват бързи алгоритми. КЛП, въпреки че е оптимален, е зависим от сигнала и няма бърз алгоритъм.



Фиг. 4.4. Остъпъчната корелация в проценти като функция на  $\rho$ ,  $N=16$

#### 4.5. Някои приложения

В тази точка са дадени някои приложения. Първоначално са разгледани някои общи приложения за диференциални уравнения, а накрая – специфични приложения в областта на комуникациите.

##### 4.5.1. Решаване на диференциални уравнения

###### 4.5.1.1. Едномерна гранична задача

Да разгледаме диференциалното уравнение от втори ред

$$y''(t) - h^2 y(t) = F(t) \quad t \geq 0 \quad (4.5.1)$$

с гранични условия:  $y(0) = 0$ ,  $y(\infty) = 0$  и

$$F(t) = \begin{cases} A & \text{за } 0 < t < b, \\ 0 & \text{за другите случаи.} \end{cases}$$

Функцията  $F(t)$  може да бъде представено чрез функцията на Хевисайд  $F(t) = A[1 - U(t - b)]$ .

Тук предполагаме, че  $h$ ,  $A$  и  $b$  са константи. Ако приложим оператора  $F_c$  за това диференциално уравнение и използваме резултатите от (4.2.9) и (4.2.34), получаваме

$$-\omega^2 Y_c - Y_c'(0) - h^2 Y_c = \frac{A}{\omega} \sin \omega b. \quad (4.5.3)$$

Заместваме граничните условия и решаваме спрямо  $Y_c$ . Получава се

$$Y_c = \frac{A}{\omega(\omega^2 + h^2)} \sin \omega b = -\frac{A}{h^2} \left( \frac{\sin \omega b}{\omega} - \frac{\omega \sin \omega b}{\omega^2 + h^2} \right). \quad (4.5.4)$$

За обръщането на  $Y_c$  се използват (4.2.34), (4.2.55) и (4.2.3). Обратното КПФ има нормиращ множител  $2/\pi$ . Решението на първоначалната гранична задача е

$$-\frac{A}{h^2} [1 - U(t - b) - e^{-hb} \cosh b] \quad \text{за } t < b,$$

$$-\frac{A}{h^2} [1 - U(t - b) + e^{-hb} \sinh b] \quad \text{за } t > b.$$

Този резултат може да бъде записан по следния начин

$$y(t) = \begin{cases} \frac{A}{h^2} (e^{-hb} \cosh ht - 1) & \text{за } t < b, \\ -\frac{A}{h^2} e^{-ht} \sinh ht & \text{за } t > b. \end{cases} \quad (4.5.5)$$

##### 4.5.1.2. Двумерна гранична задача

Функцията  $v(x, y)$ , която е дефинирана за  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , удовлетворява диференциалното уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -h(x), \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad v(x, 0) = f(x). \quad (4.5.6)$$

Ще предполагаме, че  $\int_0^\infty h(x) dx = 0$  и че функцията

$$p(x) = \int_0^\infty \int_0^x h(t) dt dr \quad (4.5.7)$$

съществува и че функциите  $p(x)$  и  $f(x)$  имат КПФ. Ще отбележим, че от (4.5.7)

$$p''(x) = h(x) \quad \text{и} \quad p'(0) = 0,$$

което води до следната връзка между техните КПФ:

$$\omega^2 P_c(\omega) = H_c(\omega). \quad (4.5.8)$$

Извършваме косинус преобразуване по отношение на променливата  $x$  на диференциалното уравнение (4.5.6). Получава се

$$-\omega^2 V_c(\omega, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V_c(\omega, y) = -\omega^2 P_c(\omega). \quad (4.5.9)$$

Тъй като функцията  $V_c(\omega, y)$  е ограничена за  $y > 0$ , уравнението (4.5.9) има следното решение

$$V_c(\omega, y) = Ce^{-ay} + P_c(\omega), \quad (4.5.10)$$

където  $C$  е произволна константа, определена от условието  $V(x, 0) = f(x)$ . В честотната област това означава, че

$$V_c(\omega, 0) = F_c(\omega). \quad (4.5.11)$$

Тогава

$$V_c(\omega, y) = [F_c(\omega) - P_c(\omega)] e^{-ay} + P_c(\omega). \quad (4.5.12)$$

Намираме обратното преобразуване на този израз. Решението в  $(x, y)$ -областта е

$$v(x, y) = p(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [f(t) - p(t)] \left[ \frac{y}{(x+t)^2 + y^2} + \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \right] dt. \quad (4.5.13)$$

Тук използваме (4.2.44) и резултата (4.2.20).

#### 4.5.1.3. Едномерна гранична задача, която зависи от времето

Да разгледаме функцията  $u(x, t)$ , която е ограничена за  $x > 0$  и  $t > 0$ . Нека тя удовлетворява частното диференциално уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h(x, t), \quad (4.5.14)$$

а  $u(x, 0) = f(x)$  и  $u(0, t) = g(t)$  са съответно началното и граничното условие.

Извършваме СПФ за променливата  $x$  и приемаме, че всички интеграли съществуват. Получава се

$$\frac{\partial U_s}{\partial t} + \omega^2 U_s = \omega g(t) + H_s(\omega, t). \quad (4.5.15)$$

Решението на това уравнение е

$$U_s(\omega t) e^{\omega^2 t} = \int_0^t [\omega g(\tau) + H_s(\omega, \tau)] e^{\omega^2 \tau} d\tau + C. \quad (4.5.16)$$

Константата  $C$  може да бъде намерена, ако се използва условието  $U_s(\omega, 0) = F_s(\omega)$ .

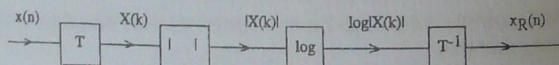
След това се извършва обратното преобразуване и се получава

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty U_s(\omega, t) \sin \omega x d\omega. \quad (4.5.17)$$

Ще отбележим, че в зависимост от вида на функциите  $F_s$  и  $H_s$ , обратното СПФ може да се получи с помощта на таблица.

#### 4.5.2. Кепстрален анализ за обработка на речеви сигнали

На фиг. 4.5 са показани основните стъпки на кепстралния анализ. Тук  $\{x(n)\}$  е входната редица на речевия сигнал, а  $\{X(k)\}$  е преобразуваната редица. След това се формира логаритъм от абсолютната стойност на тази редица. Следва обратно преобразуване  $T^{-1}$  и накрая се получава изходната редица  $\{x_R(n)\}$ , наречена реален кепстър.



Фиг. 4.5. Блокова схема за извършване на кепстрален анализ на сигнала  $x(n)$

Преобразуването може да бъде всяко обратимо преобразуване. Ако  $T$  е  $N$ -точково ДПФ, може да бъде използвано ДКП. За да се получи реален кепстър като се използва ДПФ, входната редица трябва да бъде допълнена с нули накрая, за да се удвои нейната дължина. Обаче тъй като съществува прости връзки между ДПФ и ДКП за реални четни редици ДПФ се превръща в ДКП.

Нека  $x(n)$ ,  $n=0, 1, 2, \dots, M$  е входната редица на речевия сигнал, която ще бъде анализирана. За да се получи реалният кепструм  $x_R(n)$  като се използва ДПФ, редиците се допълват с нули, така че  $x(n)=0$  за  $n+M+1, \dots, 2M-1$ . Ако е дадена симетричната редица  $x(n)$ , дефинирана по следния начин

$$s(n) = \begin{cases} x(n) & \text{за } 0 < n < M, \\ 2x(n) & \text{за } n = 0, M, \\ x(2M-n) & \text{за } M < n \leq 2M-1, \end{cases} \quad (4.5.18)$$

тогава ДПФ за  $s(n)$  може да бъде получено с формулата

$$S_F(k) = 2 \left[ x(0) + (-1)^k x(M) + \sum_{n=1}^{M-1} x(n) \cos \left( \frac{n k \pi}{M} \right) \right]. \quad (4.5.19)$$

Тъй като  $\{s(n)\}$  е симетрична реална редица, получена от  $\{x(n)\}$ , можем да запишем

$$S_F(k) = Re[X_F(k)],$$

където  $[X_F(k)]$  е  $2M$ -точково ДПФ на допълнената с нули редици. Ако комбинираме този резултат с (4.5.19) виждаме, че

$$Re[X_F(k)] = 2[X_C(k)], \quad (4.5.20)$$

където  $X_C$  е  $(M+1)$ -точково ДКП на редицата на речевия сигнал  $\{x(n)\}$ . Формула (4.5.20) е валидна с точност до нормиращата константа. Тъй като директното факторизиране на разредената матрица на ДКП от вида  $(M+1)x(M+1)$  е възможно, пресмятането на ДКП може да стане съзърдане алгоритъм. Това означава, че с цел да се получи реален кепструм на  $\{x(n)\}$ , не е необходимо допълнение на редицата с нули и пресмятането на  $x_R(k)$  може да стане като се приложи ДКП за редицата  $\{x(n)\}$ .

Възможно е вместо ДКП като метод за пресмятане на ДПФ, преобразуването  $T$  в кепстралния анализ да бъде извършено директно чрез ДКП или ДСП. Доказано е, че извършването на кепстрален анализ на речеви сигнали чрез използване на ДКП и ДСП е сравнимо с традиционното ДПФ.

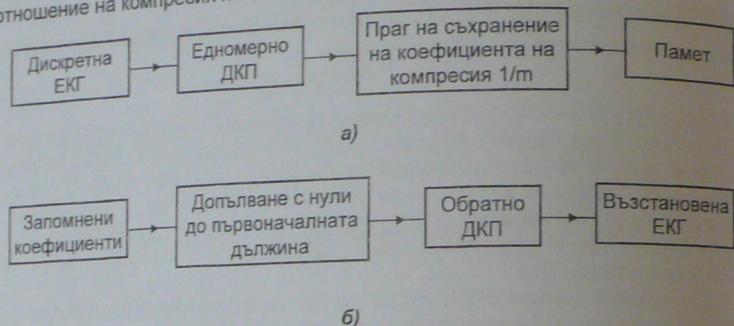
#### 4.5.3. Компресия на данни

Компресията на данни е важно приложение при кодиране на преобразуването, когато е необходимо търсенето на сигнал от голям обем данни. Кофициентите на преобразуване с голяма дисперсия може да бъдат важен критерий за разпознаване на образи, например. Онези от тях, които имат малка дисперсия, по-малка от някакъв prag, може да бъдат отстранени. Такъв подход може да бъде използван, за да се намали необходимата широчина на лентата на предавання сигнал или паметта.

Преобразуванията, използвани при компресията на данни, изискват максимална декорелация на данните с най-висок възможен кофициент на ефективност на енергийната плътност. Този кофициент се определя от това какво количество енергия може да бъде пакетирано в най-малкия брой кофициенти на преобразуване. Идеалното или оптималното преобразуване е КЛП, при което се диагонализира ковариантната матрица на данните и се пакетира най-голяма енергия в най-малък брой кофициенти на преобразуване. За съжаление КЛП е зависимо от данните и до момента няма бърз алгоритъм за него. Пресмятането и поради това не е практичен. Същевременно, марковските модели описват повечето от системи от данни достатъчно добре и въпреки, че не са оптимални, те са приближително еквивалентни на такива преобразувания като ДКП и ДСП и освен това не зависят от данните и са подходящи за използване на бързи изчислителни алгоритми. Поради това, в много приложения, такива като запомняне на електрокардиограми или данни на векторна кардиограма, или предаване на видеоданни по телефонни линии за видеотелефон, подоптималните преобразувания, такива като ДКП се предпочитат пред оптималните КЛП. За такива приложения, при които се изисква високо

качество на възстановените данни, е необходимо отношение на компресия 10:1. То може да бъде постигнато с ДКП. Отношение на компресия 3:1 за запомняне на електрокардиограми (едномерно) и данни на векторна кардиограма (двумерно) са лесно постижими.

На фиг. 4.6а и 6б са показани блоковите схеми на обработката, запомнянето и търсенето на едномерна електрокардиограма, при която се използва отношение на компресия 1:1.



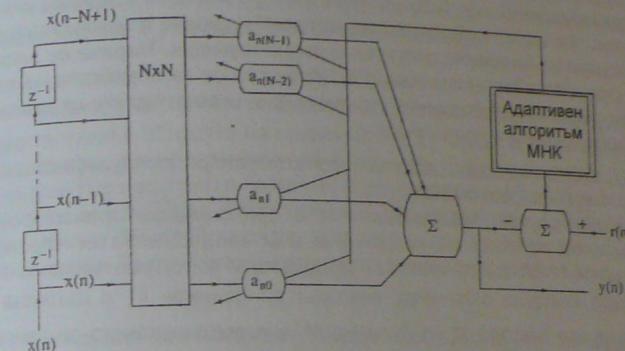
Фиг. 4.6.а) Компресия на данните за паметта;  
б) възстановяване на данните след компресия

#### 4.5.4. Преобразуваане на областта за обработка на сигнали

Отстраняването на коефициентите с малка дисперсия при обработката с ДКП ще доведе до компресия на данните, но някои подробности или необходими параметри на първоначалните данни могат да бъдат загубени при реконструкцията. Възможно е това да бъде коригирано чрез обработка на коефициентите на преобразуване преди възстановяването. В такъв случай може да бъде приложена адаптивна обработка, която се основава на някакъв субективен критерий, какъвто е случаят при видеотелефона. Друго средство за намаляване влиянието на шумовете е квантуването на коефициентите.

Друг възможен метод за обработка е субдискретизацията (декимация), извършвана също в областта на ДКП, ефективно комбинирали оперативни филтрация и кодиране на преобразуването. Такъв метод на обработка е приложен успешно за преобразуването на точно определени телевизионни сигнали в стандартни NTSC телевизионни сигнали.

Един от най-популярните методи за цифрова обработка на сигнали е адаптивната филтрация по метода на най-малките квадрати (LMS). Той може да бъде реализиран, както във времевата, така и в честотната област. На фиг. 4.7 е дадена блоковата схема за адаптивно ДКП на областта чрез LMS филтрация. Тук  $a_{n0}, a_{n1}, \dots, a_n, a_{nN-1}$  са адаптивните тегла на филътъра за преобразуване на областта. Необходимата характеристика е  $\{r(n)\}$ , а  $\{y(n)\}$  е изходният сигнал на филътъра. Доказано е, че такава филтрация на преобразуваната област ускорява сходимостта на LMS-алгоритъма за процесите, свързани с обработка на речеви сигнали, такива като спектрален анализ и почистване на ехо-сигналите.



Фиг. 4.7. Адаптивно преобразуване на областта чрез алгоритъма по МНК

#### 4.5.5. Компресия на изображения чрез дискретно локално синус преобразуване (ДЛС)

Дискретното косинус преобразуване (ДКП) е едно от най-добрите преобразувания, използвано вместо оптималното КЛП за обработка на изображения. Много стандарти, такива като JPEG (Joint Photographic Experts Group) и MPEG (Moving Pictures Experts Group) са адаптирали ДКП като метод за стандартно преобразуване при компресия на изображения. Независимо, че КЛП и ДКП изпълняват условието за съвършено възстановяване, когато няма компресия (или отстраняване на коефициенти на преобразуването) в областта на преобразуване, и двете имат недостатък т. нар. "блокиране" по време на компресия. Възможността да се случи това зависи от големината на компресията. При обработката на речеви и звукови сигнали, това се проявява като шептене във възстановения речеви сигнал. При обработката на изображения това се проявява като "покривало", което забулва възстановената картина.

Ефектът "блокиране" може да се дължи на факта, че обработката на двумерни изображения чрез преобразуване, обикновено се извършва с блокове от пиксели, най-често с размери 8x8 и 16x16. Когато се извършва модификация на коефициентите на преобразуването при компресията или друга обработка на областта на преобразуване, съвършено възстановяване се нарушава. Това води до разсъгласуване на границите на възстановените блокове.

Изследванията с цел да се отстрани това несъответствие доведоха до откриването на изглеждащото преобразуване от Малвар в 1992 г. Това преобразуване се основава на базисни функции с по-добро поведение в областта на непреобразуваната област на данните, отколкото в преобразуваната област, но това води до припокриване на базисните функции в граничната област на всеки блок, откъдето идва и името "преобразуване с припокриване". Конструирани са много такива преобразувания с припокриване като използвани различни критерии. Така например, съществуват ортогонално преобразуване с припокриване (ОПП), модулирано преобразуване с припокриване

преобразуване с припокриване, което се основава на дискретни синус и косинус базови функции.

В тази точка е описано едно такова преобразуване с припокриване, кое то се основава на дискретна синусова базисна функция. Нарича се дискретно локално синус преобразуване или ДЛС. Използва се за обработка на изображения при различни коефициенти на компресия и резултатите са сравнени с други преобразувания с припокриване.

#### 4.5.5.1. Основни понятия за ортогоналното преобразуване с припокриване (ОПП)

В общия случай, преобразуването с припокриване трансформира  $N$  дискретни точки от областта на данните в  $M$  коефициента от спрегнатата област, където  $N > M$ . Много често  $N$  е до два пъти по-голямо число от  $M$ . Ако се използват векторни означения, векторът на данните  $\bar{X}_m$  с дължина  $N$  се преобразува във вектора  $\tilde{X}_m$  с дължина  $M$ , а преобразуването се реализира чрез матрицата  $\Phi^T$  от вида  $M \times N$  посредством уравнението

$$\tilde{X}_m = \Phi^T \bar{X}_m. \quad (4.5.21)$$

Тук  $\Phi$  е матрицата на преобразуването чрез припокриване с размери  $N \times M$ . Тя може да бъде разглеждана като  $M$ -мерна матрица, която съдържа  $M$  на брой  $N$ -мерни вектора. За частния случай, когато  $M=2$  и  $N=4$ , тогава двумерното пространство съдържа два линейно независими четиримерни вектори. Такъв подход дава възможност за гъвкавост при използването на базисните функции на преобразуването.

Ако редицата на данните се обработва с преобразуване чрез припокриване, основната блокова матрица на преобразуване  $\Phi$  има размерност  $(N \times M)$ , а матрицата на преобразуването чрез припокриване  $\psi$  е блокова диагонална матрица от вида

$$\psi = \begin{pmatrix} \Phi & & & \\ & \Phi & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Phi \end{pmatrix}, \quad (4.5.22)$$

Ако  $\Phi^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \end{bmatrix}$ , матрицата  $\psi$  ще има вида

$$\psi = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_{11} & a_{12} & & \\ & & a_{21} & a_{22} & & \\ & & a_{31} & a_{32} & a_{11} & a_{12} \\ & & a_{41} & a_{42} & a_{21} & a_{22} \\ & & & & a_{31} & a_{32} \\ & & & & a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}, \quad (4.5.23)$$

където дължината на припокриване е 2.

Ако редицата от данни  $x_m$  има размерност  $K$ , преобразуваната чрез припокриване редица  $X_m$  се дефинира по следния начин

$$X_m = \psi^T x_m. \quad (4.5.24)$$

Очевидно, в сегментната форма на  $x_m$  (всеки сегмент има дължина  $N$ ), граничните точки в областта на припокриване ще бъдат обработвани чрез две последователни преобразувания на блоковете. Това може да се представи като пълзгане на прозорец с размер  $N$  върху редицата от данни със стъпка  $M$ .

Ако не се извърши компресия или друг вид обработка, всички обратни преобразувания би трябвало да удовлетворяват условието за съвършено възстановяване. Това условие в матрична форма се представя така

$$\psi \psi^T = I_k \quad \text{и} \quad \psi^T \psi = I_k, \quad (4.5.25)$$

където  $I_k$  е единичната матрица от вида  $K \times K$ . От (4.5.25) за блоковата матрица  $\Phi$  може да се запише

$$\Phi^T \Phi = I_M \quad (4.5.26)$$

и

$$\Phi^T W \Phi = O_M, \quad (4.5.27)$$

където  $W$  е матрица от вида  $M \times M$ , наречена "преместване с един блок", дефинирана по следния начин

$$W = \begin{pmatrix} O_1 & & I_L \\ & \ddots & \\ O_2 & & O_2 \end{pmatrix}.$$

Тук  $L$  е дължината на областта на припокриване,  $O_1$  е нулева матрица от вида  $L \times (M-L)$ ,  $O_2$  е нулева матрица от вида  $(M-L) \times (M-L)$  и  $O_M$  е нулева матрица от вида  $M \times M$ . Следователно, освен обикновеното условие за ортонормалност (4.5.26), преобразуването чрез припокриване изисква допълнителното условие "ортогоналност при припокриване" (4.5.27), за да се гарантира съвършено възстановяване на изображението.

#### 4.5.5.2. Дискретно локално синус преобразуване (ДЛС)

Това преобразуване е предложено от Кауфман и Майер през 1991 г.

Нека  $\phi_S$  е матрицата на ДЛС преобразуване

$$\phi_S = [\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{M-1}]. \quad (4.5.28)$$

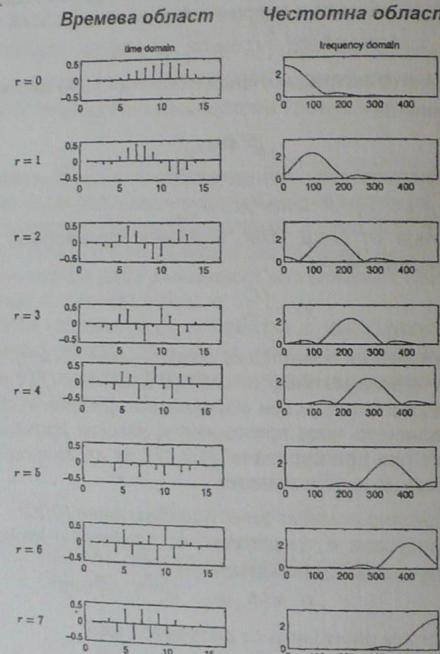
Тогава базисните функции  $\phi_r$  се дефинират така

$$\phi_r(n) = \sqrt{(2/M)} \left\{ b(n) \sin \left[ \frac{2r+1}{2} \pi \left( \frac{n}{M} - \varepsilon \right) \right] \right\}; \quad n \in [0, M-1], \quad r \in [0, M-1]. \quad (4.5.28)$$

Където  $n$  и  $r$  са съответно индексът на дискретните данни и индексът на базисната функция;  $\varepsilon = (L-1)/2M$ ;  $M$  е броят на базисните функции в множеството и  $L$  е дължината на припокриващата част.  $b(n)$  се нарича камбаноподобна функция и чрез нея се контролира пълзгането на припокриващата част на базисната функция. Тя се дефинира по следния начин

$$b(n) = \begin{cases} S_e(n) = \sin\left[\frac{n\pi}{2(L-1)} - \frac{1}{4}\sin\frac{2n\pi}{L-1}\right] & \text{за } n = 0, 1, \dots, L-1, \\ 1 & \text{за } n = L, \dots, M-1, \\ C_e(n-M) = \cos\left[\frac{(n-M)\pi}{2(L-1)} - \frac{1}{4}\sin\frac{2(n-M)\pi}{L-1}\right] & \text{за } n = M, \dots, M+L-1. \end{cases}$$

На фиг. 4.8 са показани ДЛС базисните функции във времевата и честотната област за  $M=8$ ,  $L=8$ . Тези базисни функции са подобни на тези при модулираното преобразуване чрез припокриване (МПП), предложено от Малвар през 1992 г.



Фиг. 4.8. Основните функции при ДЛС преобразуване във времева и честотна област,  $L=M=8$

#### 4.5.5.3. Резултати от моделирането

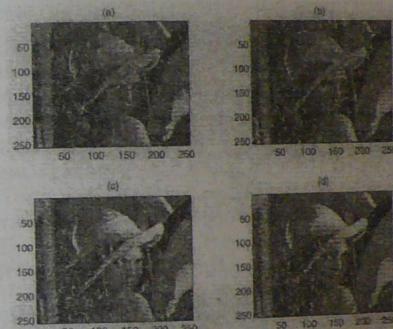
Стандартното изображение на Лена съдържа 256x256 пиксела и се използва при моделирането на компресирани изображения. Оригиналното изображение се представя с 8 бита/пиксел или 8врр и е представено на фиг. 4.9а. Компресията се извършва с преобразуване на блок  $16x16$  ( $M=L=16$  за преобразуването с припокриване) и в резултат се получават възстановени изображения чрез 0,4врр; 0,24врр, и 0,16врр.

Отношението сигнал/шум е пресметнато за компресираното изображение. То се основава на енергията (дисперсията) на първоначалното изображение и енергията на разликата на двете изображения, която се дефинира като разлика между оригиналното и компресираното изображение. При преобразуването чрез припокриване, нулите се добавят към съществуващата граница на изображението, за да бъде възможно преобразуването.

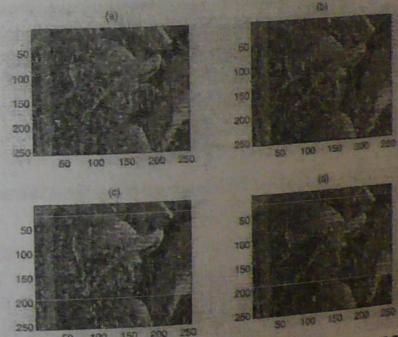
На Табл. 4.2 е направено сравнение на последното отношение сигнал/шум за няколко преобразувания чрез припокриване, съпоставени с няколко често използвани ДКП за различни коефициенти на компресия. Очевидно е, че преобразуването чрез припокриване е по-добро за обработка на изображения в сравнение с ДКП.

На фиг. 4.9, 4.10 и 4.11 са дадени различни възстановени изображения, като са използвани различни преобразувания чрез припокриване за различни коефициенти на компресия. Вижда се, че сериозни "блок" грешки липсват от компресираните изображения даже за много малки стойности на отношенияето битове/пиксел. ДЛС преобразуване се намира между ОПП и МСП.

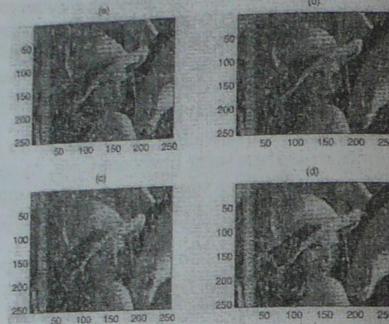
92
93
93
93
94
94
95
95
16
16
17
7
8
8



Фиг. 4.9. Сравнение на първоначалния и възстановения образ,  $M=L=16$  за 0,4врр: а) първоначалният образ за 8врр, б) ДЛС, в) ОПП, г) МПП



Фиг. 4.10. Сравнение на първоначалния и възстановения образ,  $M=L=16$  за 0,24врр: а) първоначалният образ за 8врр, б) ДЛС, в) ОПП, г) МПП



Фиг. 4.11. Сравнение на първоначалния и възстановения образ,  $M=L=16$  за 0,16брп: а) първоначалният образ за 8брп, б) ДЛС, в) ОПП, г) МПП

#### 4.6. Алгоритми за пресмятане

При пресмятане на БКП и БСП интегрирането се извършва чрез квадратури. Тъй като данните са дискретни и дължината на редиците е крайна, повечето от формулите на квадратурите могат да бъдат записани в матричен вид. Фактът, че БКП и БСП са непосредствено свързани с преобразуването на Фурие и това обяснява връзката между изчисленията на ДКП и ДСП от една страна и пресмятането на ДПФ от друга. Съществуват много алгоритми за ДПФ. Най-известният от тях е алгоритъмът за БПФ на Коли-Тъки, който лежи в основата на съвременната цифрова обработка на сигналите. По-късно бяха създадени други алгоритми като алгоритъма на Виноград например, които се основават на разложение на експоненциалния множител на прости множители и факторизиране на полиноми.

Тъй като ДСП и ДКП могат да бъдат пресметнати като се използва връзката им с ДПФ (а следователно и бързи алгоритми, такива като Коли-Тъки или Виноград), матриците на преобразуването имат необходимата структура, за да бъдат използвани непосредствено, и по този начин факторизирането чрез разредени матрици може да бъде приложено за реализиране на преобразуванията. Факторизацията зависи от размера на преобразуването, а така също и от начина, по който става нареждането на данните на редицата. Като резултат съществуват два различни вида факторизации, алгоритми с децимация във времето (ДВВ) и алгоритми с децимация по честота (ДПЧ) (алгоритмите с ДВВ са от тип Коли-Тъки, а алгоритмите с ДПЧ са тип Санде-Тъки).

#### 4.6.1. Алгоритми за БКП и БСП, които се основават на БПФ

##### 4.6.1.1. БКП на реална редица от данни

Нека  $\{x(n), n=0, 1, \dots, N\}$  е  $(N+1)$ -точкова редица. Нейното ДКП, дефинирано с (4.4.6) е

$$X_c(m) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^N k_m k_n \cos\left(\frac{mn\pi}{N}\right) x(n),$$

където

$$k_n = \begin{cases} 1 & \text{за } n \neq 0 \text{ или } N, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{за } n = 0 \text{ или } N. \end{cases}$$

Да съставим четна или симетрична редица като използваме  $\{x(n)\}$  по следния начин

$$s(n) = \begin{cases} x(n) & \text{за } 0 < n < N, \\ 2x(n) & \text{за } n = 0, N, \\ x(2N-n) & \text{за } N < n \leq 2N-1. \end{cases} \quad (4.6.1)$$

Въз основа на факта, че фуриерово преобразуване на реална симетрична редица е реална редица, свързана с косинус преобразуването на половината редица, може да се покаже, че ДСП на  $\{s(n)\}$  е

$$S_F(m) = 2 \left[ x(0) + (-1)^m x(N) + \sum_{n=1}^{N-1} \cos\left(\frac{mn\pi}{N}\right) x(n) \right]. \quad (4.6.2)$$

Следователно  $(N+1)$ -точковото ДКП на  $\{x(n)\}$  е същото, както  $2N$ -точковото ДПФ на редицата  $\{s(n)\}$  с точност до нормирящата константа, както е посочено в (4.4.6). Това означава, че ДКП на  $\{x(n)\}$  може да бъде пресметната като се използва  $2N$ -точково БПФ на  $\{s(n)\}$ . Ще отбележим, че

$$S_F(m) = \sum_{n=0}^{2N-1} s(n) W_{2N}^{mn}, \quad (4.6.3)$$

където  $W_{2N} = e^{-j2\pi/2N}$  е  $2N$ -ият основен корен на единица и се използва за дефиниране на ДПФ.

Известно е, че директното  $2N$ -точково ДПФ на реална четна редица може да бъде оценено като неефективно, тъй като се пресмята с комплексна аритметика, а резултатът е реални коефициенти на преобразуването. Знае се, че реално  $2N$ -точково ДПФ може да бъде пресметнато, като се използва  $N$ -точково ДПФ за комплексна редица.

##### 4.6.1.2. БСП на редица от реални данни

Нека  $\{x(n), n=1, 2, \dots, N-1\}$  е  $(N-1)$ -точкова редица. Нейното ДСП, дефинирано с (4.4.10), се определя по следния начин

$$X_s(m) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{mn\pi}{N}\right) x(n).$$

Да образуваме от редицата  $\{x(n)\}$  нова  $(2N-1)$ -точкова нечетна редица  $\{s(n)\}$  по следния начин

$$s(n) = \begin{cases} x(n) & \text{за } 0 < n < N, \\ 0 & \text{за } n = 0, N, \\ -x(2N-n) & \text{за } N < n \leq 2N-1. \end{cases} \quad (4.6.4)$$

Фуриерово преобразуване на реална полусиметрична редица е чисто имагинерно, което е свързано със синус преобразуването на половината редица. Като се има предвид това, може да бъде показано, че  $2N$ -точковото ДПФ на редицата  $\{s(n)\}$ , дадена с (4.6.4) е

$$S_F(m) = -2j \sum_{n=1}^{N-1} \sin\left(\frac{mn\pi}{N}\right) x(n). \quad (4.6.5)$$

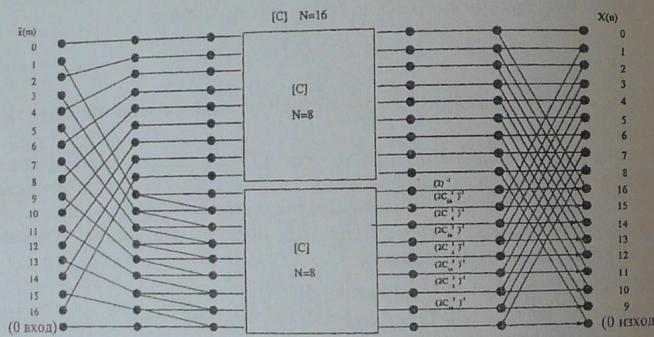
Следователно  $2N$ -точковото ДПФ на  $\{x(n)\}$  е същото, както  $(N-1)$ -точковото ДСП на  $\{\tilde{x}(n)\}$  с точност до нормиращата константа. И тук,  $S_F(m)$  е дефинирана с (4.6.3) и  $2N$ -точково БПФ за реалната редица може да бъде изчислено като се използва  $N$ -точково ДПФ за комплексна редица.

#### 4.6.2. Бързи алгоритми за ДСП и ДКП чрез директна факторизация на матрицата

##### 4.6.2.1. Алгоритми с децимация по време

Това са алгоритми тип Коли-Тъки, при които наредждането по време на данните на входната редица дава възможност да се извърши факторизиране на разредената матрица на преобразуването. Основната идея е да се намали размера  $N$  на матрицата на преобразуването, която има блокова диагонална форма, а всеки блок е свързан по същия начин с преобразуване с размер  $N/2$ . Ако тази процедура се прилага рекурсивно, накрая се достига до основната  $2 \times 2$  "пеперуда". По-долу даваме основните формули за това преобразуване, а също и съответните графи за случаите на ДКП и ДСП с децимация по време (ДВ).

1. Алгоритъм за ДКП с ДВ (фиг. 4.12): Нека



Фиг. 4.12. Сигналният граф на ДКП с ДВ,  $N=16$

$$X_c(m) = \sum_{n=0}^N C_N^{mn} \tilde{x}(n), \quad m = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.6.6)$$

е ДКП на редицата  $\{x(n)\}$ . Тук  $\tilde{x}(n)$  е  $x(n)$ , мащабирана с нормиращата константа и множителя  $k_n$ , докато  $X_c(m)$  е мащабирана с  $k_m$ , както в (4.4.6). Освен това е използвано, с цел опростяване на записването, означението

$$C_N^{mn} = \cos\left(\frac{mn\pi}{N}\right). \quad (4.6.7)$$

Формула (4.6.6) може да бъде записана така

$$\begin{aligned} X_c(m) &= g_c(m) + h_c(m), \\ X_c(N-m) &= g_c(m) - h_c(m), \quad \text{за } m = 0, 1, \dots, N/2, \\ X_c(N/2) &= g_c(N/2). \end{aligned} \quad (4.6.8)$$

Тук  $g_c$  и  $h_c$  участват в ДКП с размер  $N/2$  и се дефинират по следния начин:

$$\begin{aligned} g_c(m) &= \sum_{n=0}^{N/2} C_{N/2}^{mn} \tilde{x}(2n), \quad m = 0, 1, 2, \dots, N/2, \\ h_c(m) &= \frac{1}{2C_N^m} \sum_{n=0}^{N/2} C_{N/2}^{mn} [\tilde{x}(2n+1) + \tilde{x}(2n-1)], \quad m = 0, 1, 2, \dots, N/2-1, \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

$$h_c(N/2) = 0 \text{ и където } \tilde{x}(N+1) = 0.$$

2. Алгоритъм за ДСП с ДВ: Нека

$$X_s(m) = \sum_{n=0}^{N-1} S_N^{mn} \tilde{x}(n), \quad m = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.6.10)$$

е ДСП на редицата  $\{x(n)\}$ . Тук  $\tilde{x}(n)$  е  $x(n)$ , мащабирана със собствена нормираща константа, както е показано в (4.4.10). Въвеждаме означението

$$S_N^{mn} = \sin\left(\frac{mn\pi}{N}\right). \quad (4.6.11)$$

Ако разсъждаваме по същия начин, както при алгоритъма за ДКП с десимация по време, за (4.6.10) можем да запишем

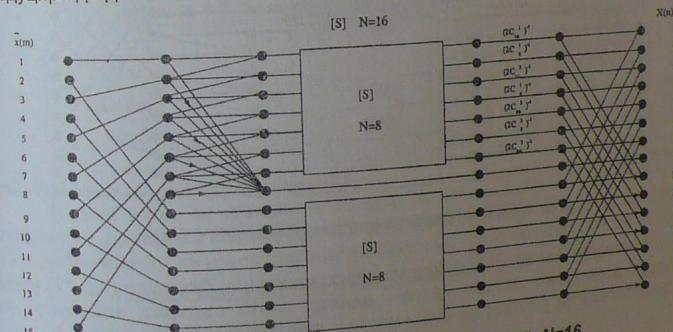
$$X_s(m) = g_s(m) + h_s(m), \quad X_s(N-m) = g_s(m) - h_s(m), \quad \text{за } m = 1, 2, \dots, N/2-1. \quad (4.6.12)$$

$$X_s(N/2) = \sum_{n=0}^{N/2-1} (-1)^n \tilde{x}(2n+1).$$

Тук  $g_s(m)$  и  $h_s(m)$  са дефинирани по следния начин:

$$\begin{aligned} g_s(m) &= \frac{1}{2C_N^m} \sum_{n=1}^{N/2-1} S_{N/2}^{mn} [\tilde{x}(2n+1) + \tilde{x}(2n-1)], \\ h_s(m) &= \sum_{n=1}^{N/2-1} S_{N/2}^{mn} \tilde{x}(2n). \end{aligned} \quad (4.6.13)$$

Може да бъде показано, че  $g_s$  и  $h_s$  са ДСП на половината от първона-чалната дължина на редицата, която съдържа само нечетните членове на входната редица, докато другата половина съдържа само четните отчети. На фиг. 4.13 е показан сигналният ориентиран граф за  $N=16$  на ДСП с ДВ. То се редуцира до два блока с  $N=8$  на ДСП.



Фиг. 4.13. Сигналният граф на ДСП с ДВ,  $N=16$

#### 4.6.2.2. Алгоритми с децимация по честота (ДУ)

Това са алгоритми тип Санд-Тъки, при които наредждането на входната редица е така, както постъпват данните, т.е. не е извършено пермутиране. Отново стремежът е да се намали размера на преобразуването за всеки етап на изчислениета чрез двукратно намаляване на размера. Ето защо тези алгоритми са просто версия на алгоритмите с децимация по време.

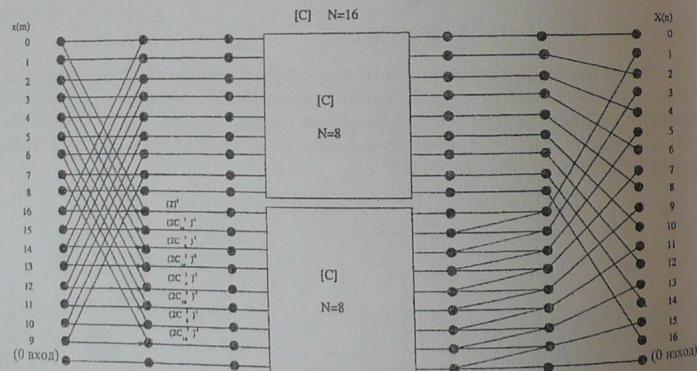
1. Алгоритъм за ДКП с децимация по честота: Нека изходните редици във формула (4.6.6), които съдържат съответно само четни и само нечетни членове, са

$$\begin{aligned} X_c(2m) &= G_c(m) \quad \text{за } m = 0, 1, \dots, N/2, \\ X_c(2m+1) &= H_c(m) + H_c(m+1), \quad \text{за } m = 0, 1, \dots, N/2-1. \end{aligned} \quad (4.6.14)$$

Тук

$$\begin{aligned} G_c(m) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} [\tilde{x}(n) + \tilde{x}(N-n)] C_{N/2}^{mn} + (-1)^m \tilde{x}(N/2), \\ H_c(m) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \frac{1}{2C_N^{mn}} [\tilde{x}(n) - \tilde{x}(N-n)] C_{N/2}^{mn}. \end{aligned} \quad (4.6.15)$$

Както се вижда, редиците  $G_c(m)$  и  $H_c(m)$  са ДКП с дължина  $N/2$ . Следователно, на всеки етап на изчисление, дължината на преобразуването се намалява два пъти. Крайният резултат е факторизиране на първоначалната матрица на преобразуване, при което голяма част от елементите им са нули, т.е. едновременно с това матриците стават разредени. На фиг. 4.14 е даден сигналният ориентиран граф на ДКП с ДУ за  $N=16$ .



Фиг. 4.14. Сигналният граф на ДКП с ДПЧ,  $N=16$

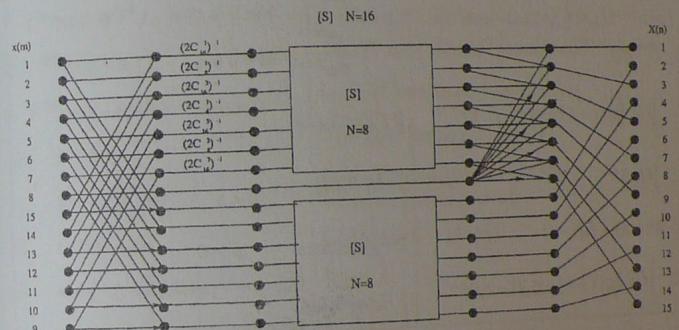
2. Алгоритъм за ДСП с децимация по честота: Формула (4.6.11) може да бъде разделена на две части - едната, която съдържа членовете на изходната редица, стоящи на четни места и друга – на нечетни места

$$\begin{aligned} X_s(m) &= G_s(m) \quad \text{за } m = 1, 2, \dots, N/2-1, \\ X_s(2m-1) &= H_s(m) + H_s(m-1) + (-1)^{m+1} \tilde{x}(N/2), \quad \text{за } m = 1, 2, \dots, N/2-1, \\ X_s(N-1) &= H_s(N/2-1) + (-1)^{N/2+1} \tilde{x}(N/2). \end{aligned} \quad (4.6.16)$$

Тук  $G_s(m)$  и  $H_s(m)$  са ДСП на половините на първоначалната изходна редица, дефинирани като следва

$$\begin{aligned} G_s(m) &= \sum_{n=1}^{N/2-1} [\tilde{x}(n) - \tilde{x}(N-n)] S_{N/2}^{mn}, \\ H_s(m) &= \sum_{n=1}^{N/2-1} \frac{1}{2C_N^{mn}} [\tilde{x}(n) - \tilde{x}(N-n)] S_{N/2}^{mn}. \end{aligned} \quad (4.6.17)$$

На фиг. 4.15 е даден сигналният ориентиран граф на ДСП с ДЧ за  $N=16$ . Този граф е спретнат на сигналния граф от фиг. 4.13.



Фиг. 4.15. Сигналният граф на ДСП с ДПЧ,  $N=16$

Таблица 4.2. Сравнение по параметра (сигнал/шум)

	ДЛ	ОПП	МПП	ДКП
0,4врр	16,3	15,8	16,5	13,9
0,24врр	13,8	13,6	14,3	12,2
0,16врр	12,2	12,2	12,7	11,2

#### 4.7. Таблици на преобразуванията

В тази точка са дадени таблиците за БКП и БСП. Те съдържат най-основните функции и техните преобразувания. В т. 4.7.3 са дадени означенията и дефинициите на някои специални функции, които се срещат в таблиците.

##### 4.7.1. Косинусово преобразуване на Фурье

###### 4.7.1.1. Основни свойства

$f(t)$	$F_c(\omega) = \int_0^\infty f(t) \cos(\omega t) dt \quad \omega > 0$
1. $F_c(t)$	$(\pi/2)f(\omega)$
2. $f(at) \quad a > 0$	$(1/a) F_c(a\omega)$
3. $f(at)\cos bt \quad a, b > 0$	$(1/2a) \left[ F_c\left(\frac{\omega+b}{a}\right) + F_c\left(\frac{\omega-b}{a}\right) \right]$
4. $f(at) \sin bt \quad a, b > 0$	$(1/2a) \left[ F_s\left(\frac{\omega+b}{a}\right) - F_s\left(\frac{\omega-b}{a}\right) \right]$
5. $t^{2n}f(t)$	$(-1)^n \frac{d^{2n}}{d\omega^{2n}} F_c(\omega)$
6. $t^{2n+1}f(t)$	$(-1)^n \frac{d^{2n+1}}{d\omega^{2n+1}} F_s(\omega)$
7. $\int_0^{\infty} f(r) [g(t+r) + g(t-r)] dr$	$2 F_c(\omega) G_c(\omega)$
8. $\int_t^{\infty} f(r) dr$	$(1/\omega) F_s(\omega)$
9. $f(t+a) - f_0(t-a) \quad a > 0$	$2 F_s(\omega) \sin a\omega \quad a > 0$
10. $\int_0^{\infty} f(r) [g(t+r) - g_0(t-r)] dr$	$2 F_s(\omega) G_s(\omega)$

#### 4.7.1.2. Алгебрични функции

$f(t)$	$F_c(\omega)$
1. $(1/\sqrt{t})$	$(\sqrt{\pi}/2)(1/\omega)^{1/2}$
2. $(1/\sqrt{t})[1 - U(t-1)]$	$(2\pi/\omega)^{1/2} C(\omega)$
3. $(1/\sqrt{t})U(t-1)$	$(2\pi/\omega)^{1/2} [1/2 - C(\omega)]$
4. $(t+a)^{-1/2} \quad  \arg a  < \pi$	$(\pi/2\omega)^{1/2} \{ \cos a\omega [1 - 2C(a\omega)] + \sin a\omega [1 - 2S(a\omega)] \}$
5. $(t-a)^{-1/2} U(t-a)$	$(\pi/a)^{1/2} [\cos a\omega - \sin a\omega]$
6. $a(t^2 + a^2)^{-1} \quad a > 0$	$(\pi/a) \exp(-a\omega)$
7. $t(t^2 + a^2)^{-1} \quad a > 0$	$-1/2 [e^{-a\omega} Ei(a\omega) + e^{a\omega} Ei(a\omega)]$
8. $(1-t^2)(1+t)^{-2}$	$(\pi/2)\omega \exp(-\omega)$
9. $-t(t^2 - a^2)^{-1} \quad a > 0$	$\cos a\omega Ci(a\omega) + \sin a\omega Si(a\omega)$

#### 4.7.1.3. Експоненциални и логаритмични функции

$f(t)$	$F_c(\omega)$
1. $e^{-at} \quad Re a > 0$	$a(a^2 + \omega^2)^{-1}$
2. $(1+t)e^{-t} \quad Re a > 0$	$2(1+\omega^2)^{-2}$
3. $\sqrt{t} e^{-at} \quad Re a > 0$	$(\sqrt{\pi}/2)(a^2 + \omega^2)^{-3/4} \cos[3/2 \arctg(\omega/a)]$
4. $e^{-at}/\sqrt{t} \quad Re a > 0$	$(\sqrt{\pi}/2)(a^2 + \omega^2)^{-1/2} [(a^2 + \omega^2)^{1/2} + a]^{1/2}$
5. $t^n e^{-at} \quad Re a > 0$	$n! [a/(a^2 + \omega^2)]^{n+1} \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m \binom{n+1}{2m} \left(\frac{\omega}{a}\right)^{2m}$
6. $\exp(-a^2 t^2)/\sqrt{t} \quad Re a > 0$	$\pi(\omega/8a)^{1/2} \exp(-\omega^2/8a) \exp(-\omega^2/8a)$
7. $t^{2n} \exp(-a^2 t^2) \quad  \arg a  < \pi/4$	$(-1)^n \sqrt{\pi} 2^{-2n-j} a^{-n-j} \exp[-(\omega/2a)^2] H_{2n}(z^{-1/2} \omega/a)$
8. $t^{-3/2} \exp(-a/t) \quad Re a > 0$	$(\pi/2)^{1/2} \exp[-(2a\omega)^{1/2}] \cos(2a\omega)^{1/2}$
9. $t^{-1/2} \exp(-a/\sqrt{t}) \quad Re a > 0$	$(\pi/2\omega)^{1/2} [\cos(2a\sqrt{\omega}) - \sin(2a\sqrt{\omega})]$
10. $t^{-1/2} \ln t$	$-(\pi/2\omega)^{1/2} [\ln(4\omega) + C + \pi/2]$
11. $(t^2 - a^2)^{-1} \ln t \quad a > 0$	$(\pi/2\omega) [\sin(a\omega) [ci(a\omega) - \ln a] - \cos(a\omega) [si(a\omega) - \pi/a]]$
12. $t^{-1} \ln(1+t)$	$(1/2) [ci(\omega)]^2 + [si(\omega)]^2$
13. $\exp(-t/\sqrt{2}) \sin(\pi/4 + t/\sqrt{2})$	$(1 + \omega^4)^{-1}$
14. $\exp(-t/\sqrt{2}) \sin(\pi/4 + t/\sqrt{2})$	$\omega^2 (1 + \omega^4)^{-1}$
15. $\ln \frac{a^2 + t^2}{1 + t^2} \quad a > 0$	$(\pi/\omega) [\exp(-\omega) - \exp(-a\omega)]$
16. $\ln[1 + (a/t)^2] \quad a > 0$	$(\pi/\omega) [1 - \exp(-a\omega)]$

#### 4.7.1.4. Тригонометрични функции

$f(t)$	$F_c(\omega)$
1. $t^{-1} e^{-t} \sin t$	$(1/2) \arctg(2\omega^{-2})$
2. $t^{-2} \sin^2(at) \quad a > 0$	$(\pi/2)(a - \omega/2) \quad \omega < 2a$ $0 \quad \omega > 2a$
3. $\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \quad n = 2, 3, \dots$	$\left(\frac{n\pi}{2}\right)^{r<\omega+n/2} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r (\omega + n - 2r)^{n-r}}{r!(n-r)!} \quad 0 < \omega < n, n \leq \omega$
4. $\exp(-\beta t^2) \cos at \quad Re \beta > 0$	$(1/2)(\pi/\beta)^{1/2} \exp\left[-\left(\frac{a^2 + \omega^2}{4\beta}\right)^{1/2}\right] \cosh\left(\frac{a\omega}{2\beta}\right)$

5. $(a^2 + t^2)^{-1}(1 - 2\beta \cos t + \beta^2)^{-1},$ $\operatorname{Re} a > 0,  \beta  < 1$	$(1/2)(\pi/\alpha)(1 - \beta^2)(e^{-a} - \beta)^{-1}(e^{a - a\omega} + \beta e^{a\omega}),$ $0 \leq \omega < 1$
6. $\sin(at^2) \quad a > 0$	$(1/4)(2\pi/a)^{1/2} \left[ \cos\left(\frac{\omega^2}{4a}\right) - \sin\left(\frac{\omega^2}{4a}\right) \right]$
7. $\sin[a(1-t^2)] \quad a > 0$	$-(1/2)(\pi/a)^{1/2} \cos[a + \pi/4 + \omega^2/(4a)]$
8. $\cos(at^2) \quad a > 0$	$(1/4)(2\pi/a)^{1/2} \left[ \cos\left(\frac{\omega^2}{4a}\right) + \sin\left(\frac{\omega^2}{4a}\right) \right]$
9. $\cos[a(1-t^2)] \quad a > 0$	$(1/2)(\pi/a)^{1/2} \sin[a + \pi/4 + \omega^2/(4a)]$
10. $\tan^{-1}(a/t) \quad a > 0$	$(2\omega)^{-1} [e^{-a\omega} Ei(a\omega) - e^{a\omega} Ei(-a\omega)]$

#### 4.7.2. Синусово преобразуване на Фурье

##### 4.7.2.1. Основни свойства

$f(t)$	$F_s(\omega) = \int_0^\infty f(t) \sin(\omega t) dt \quad \omega > 0$
1. $F_s(t)$	$(\pi/2)f(\omega)$
2. $f(at) \quad a > 0$	$(1/a)F_s(\omega/a)$
3. $f(at)\cos bt \quad a, b > 0$	$(1/2a) \left[ F_s\left(\frac{\omega+b}{a}\right) + F_s\left(\frac{\omega-b}{a}\right) \right]$
4. $f(at)\sin bt \quad a, b > 0$	$-(1/2a) \left[ F_c\left(\frac{\omega+b}{a}\right) - F_c\left(\frac{\omega-b}{a}\right) \right]$
5. $t^{2n}f(t)$	$(-1)^n \frac{d^{2n}}{d\omega^{2n}} F_s(\omega)$
6. $t^{2n+1}f(t)$	$(-1)^{n+1} \frac{d^{2n+1}}{d\omega^{2n+1}} F_c(\omega)$
7. $\int_0^\infty f(r) \int_{ t-r }^{t+r} g(s) ds dr$	$(2/\omega)F_s(\omega)G_s(\omega)$
8. $f_o(t+a) + f_o(t-a)$	$2F_s(\omega)\cos a\omega$
9. $f_e(t-a) - f_e(t+a)$	$2F_c(\omega)\sin a\omega$
10. $\int_0^\infty f(r) [g( t-r ) - g(t+r)] dr$	$2F_s(\omega)G_c(\omega)$

#### 4.7.2.2. Алгебрични функции

$f(t)$	$F_s(\omega)$
1. $1/t$	$\pi/2$
2. $1/\sqrt{t}$	$(\pi/2\omega)^{1/2}$
3. $(1/\sqrt{t})[1 - U(t-1)]$	$(2\pi/\omega)^{1/2} S(\omega)$
4. $(1/\sqrt{t})U(t-1)$	$(2\pi/\omega)^{1/2}[1/2 - S(\omega)]$
5. $(t+a)^{-1/2} \quad  \arg a  < \pi$	$(\pi/2\omega)^{1/2} \{ \cos a\omega [1 - 2S(a\omega)] - \sin a\omega [1 - 2C(a\omega)] \}$
6. $(t-a)^{-1/2}U(t-a)$	$(\pi/2\omega)^{1/2}[\sin a\omega + \cos a\omega]$
7. $t(t^2 + a^2)^{-1} \quad a > 0$	$(\pi/2)\exp(-a\omega)$
8. $t(t^2 - a^2)^{-1} \quad a > 0$	$(-\pi/2)\cos(a\omega)$
9. $t(a^2 + t^2)^{-2} \quad a > 0$	$(\pi\omega/4a)\exp(-a\omega)$
10. $a^2[t(a^2 + t^2)]^{-1} \quad a > 0$	$(\pi/2)[1 - \exp(-a\omega)]$
11. $t(4 + t^2)^{-1}$	$(\pi/4)\exp(-\omega)\sin\omega$

#### 4.7.2.3. Експоненциални и логаритмични функции

$f(t)$	$F_s(\omega)$
1. $e^{-at} \quad \operatorname{Re} a > 0$	$\omega(a^2 + \omega^2)^{-1}$
2. $te^{-at} \quad \operatorname{Re} a > 0$	$(2a\omega)(a^2 + \omega^2)^{-2}$
3. $t(1+at)e^{-at} \quad \operatorname{Re} a > 0$	$(8a^3\omega)(a^2 + \omega^2)^{-3}$
4. $e^{-at}/\sqrt{t} \quad \operatorname{Re} a > 0$	$(\sqrt{\pi/2})(a^2 + \omega^2)^{-1/2} [(a^2 + \omega^2)^{1/2} - a]^{1/2}$
5. $t^{-3/2}e^{-at} \quad \operatorname{Re} a > 0$	$(2\pi)^{1/2}[(a^2 + \omega^2)^{1/2} - a]^{1/2}$
6. $\exp(-at^2) \quad \operatorname{Re} a > 0$	$-j(1/2)(\pi/a)^{1/2} \exp(-\omega^2/4a) Ei\left(\frac{j\omega}{2\sqrt{a}}\right)$
7. $t \exp(-t^2/4a) \quad \operatorname{Re} a > 0$	$2a\omega\sqrt(\pi a)\exp(-a\omega^2)$
8. $t^{-3/2}\exp(-a/t) \quad  \arg a  < \pi/2$	$(\pi/2)^{1/2} \exp[-(2a\omega)^{1/2}] \sin(2a\omega)^{1/2}$ $-(\pi/2)(a/\omega)^{1/2} [J_{1/4}(a^2/8\omega)]$ • $\cos(\pi/8 + a^2/8\omega) + Y_{1/4}(a^2/8\omega)$ • $\sin(\pi/8 + a^2/8\omega)$
9. $t^{-3/4}\exp(-a/\sqrt{t}) \quad  \arg a  < \pi/2$	$-(\pi/2)[C + \ln\omega]$
10. $t^{-1}\ln t$	$-(\pi/2)[\cos(a\omega)C(a\omega) - \ln a] + \sin(a\omega)[S(a\omega) - \pi/2]$
11. $t(t^2 - a^2)^{-1} \ln t \quad a > 0$	$-(\pi/2)[\cos(a\omega)C(a\omega) - \ln a] + \sin(a\omega)[S(a\omega) - \pi/2]$
12. $t^{-1}\ln(1 + a^2 t^2) \quad a > 0$	$-\pi Ei(-\omega/a)$
13. $\ln \frac{a^2 + t^2}{ t-a } \quad a > 0$	$(\pi/\omega)\sin a\omega$

4.7.2.4. Тригонометрични функции

$f(t)$	$F_s(\omega)$
1. $t^{-1} \sin^2(at)$ $a > 0$	$\begin{cases} \pi/4 & 0 < \omega < 2a \\ \pi/8 & \omega = 2a \\ 0 & \omega > 2a \end{cases}$
2. $t^{-2} \sin^2(at)$ $a > 0$	$(1/4)(\omega + 2a) \ln \omega + 2a  + (1/4)(\omega - 2a) \ln \omega - 2a  - (1/2)\omega \ln \omega$
3. $t^{-2}[1 - \cos at]$ $a > 0$	$(\omega/2) \ln[(\omega^2 - a^2)/\omega^2] + (a/2) \ln[(\omega + a)/(\omega - a)]$
4. $\sin(at^2)$ $a > 0$	$(\pi/2a)^{1/2} \{ \cos(\omega^2/4a) C[\omega/(2\pi a)] + \sin(\omega^2/4a) S[\omega/(2\pi a)] \}$
5. $\cos(at^2)$ $a > 0$	$(\pi/2a)^{1/2} \{ \sin(\omega^2/4a) C[\omega/(2\pi a)] - \cos(\omega^2/4a) S[\omega/(2\pi a)] \}$
6. $\arctg(a/t)$ $a > 0$	$(\pi/2\omega)[1 - \exp(-a\omega)]$

4.7.3. Означения и дефиниции

1.  $f(t)$  – по части гладка и абсолютно интегруема функция върху положителната реална ос.
2.  $F_c(\omega)$  – фуриерово косинус преобразуване на  $f(t)$ .
3.  $F_s(\omega)$  – фуриерово синус преобразуване на  $f(t)$ .
4.  $f_0(t)$  – нечетно продължение на функцията  $f$  върху цялата реална ос.
5.  $f_\theta(t)$  – четно продължение на функцията  $f$  върху цялата реална ос.
6.  $C(\omega)$  е дефинирана с интеграла

$$(2\pi)^{-\sqrt{2}} \int_0^\omega t^{-\sqrt{2}} \cos t dt.$$

7.  $S(\omega)$  е дефинирана с интеграла

$$(2\pi)^{-\sqrt{2}} \int_0^\omega t^{-\sqrt{2}} \sin t dt.$$

8.  $Ei(x)$  е экспоненциалната интегрална функция, дефинирана по следния начин

$$-\int_{-x}^{\infty} t^{-1} e^{-t} dt \quad |\arg x| < \pi.$$

9.  $\bar{Ei}(x)$  се дефинира по следния начин

$$1/2 [Ei(x + j0) + Ei(x - j0)].$$

10.  $Ci(x)$  е функцията интегрален косинус, дефинирана по следния начин

$$Ci(x) = - \int_{-x}^{\infty} t^{-1} \cos t dt.$$

11.  $Si(x)$  е функцията интегрален синус, дефинирана по следния начин

$$Si(x) = \int_0^x t^{-1} \sin t dt.$$

12.  $I_v(z)$  е модифицирана функция на Бесел от първи тип

$$I_v(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{v+2m}}{m! \Gamma(v+m+1)}, \quad |z| < \infty, |\arg(x)| < \pi.$$

13.  $He_n(x)$  е полиномът на Ермит

$$He_n(x) = (-1)^n \exp(x^2/2) \frac{d^n}{dx^n} [\exp(-x^2/2)].$$

14.  $C$  е константата на Ойлер

$$C = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=1}^m (1/n) - \ln m \right] = 0,5772156649\dots$$

15.  $ci(x)$  и  $si(x)$ , и  $Ci(x)$  и  $Si(x)$  са свързани по следния начин

$$ci(x) = -Ci(x), \quad si(x) = Si(x) - \pi/2.$$

16.  $Erf(x)$  е функция на грешката

$$Erf(x) = \left(2/\sqrt{\pi}\right) \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

17.  $J_v(x)$  и  $Y_v(x)$  са функции на Бесел, съответно от първи и втори тип

$$J_v(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(v+m+1)} \frac{(x/2)^{v+2m}}{m! \Gamma(v+m+1)}$$

и

$$Y_v(x) = \cos \operatorname{ec} \{ v\pi [J_v(x) \cos v\pi - J_{-v}(x)] \}.$$

18.  $U(t)$  е стъпковата функция на Хевисайд

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 & t > 0. \end{cases}$$

19.  $\binom{m}{n}$  е биномният кофициент

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

20.  $\Gamma(x)$  е гама-функцията

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

## СЪДЪРЖАНИЕ

### ГЛАВА 1. Въведение в теорията на сигналите и системите

1.1. Въведение	3
1.2. Дискретни сигнали	3
1.2.1. Комплексни редици	4
1.2.2. Някои основни редици	4
1.2.3. Дължина на сигнала	5
1.2.4. Периодични и непериодични редици	5
1.2.5. Симетрични редици	6
1.2.6. Операции със сигнали	6
1.2.7. Декомпозиция на сигнала	7
1.3. Дискретни във времето системи	9
1.3.1. Свойства на системите	9
1.4. Конволюция	13
1.4.1. Свойства на конволюцията	13
1.4.2. Извършване на конволюция	14
1.5. Диференчни уравнения	18
Решени задачи	22

### ГЛАВА 2. Дискретни преобразувания

2.1. Редове на Фурье	55
2.1.1. Преобразуване на Фурье	58
2.2. Дискретно преобразуване на Фурье. Обратно дискретно преобразуване на Фурье	60
2.3. Свойства на ДПФ	65
2.4. Изчислителна сложност на ДПФ	67
2.5. Алгоритъм за БПФ	67
2.5.1. Фигурата "пеперудка"	72
2.5.2. Описание на алгоритъма за БПФ	74
2.5.2.1. Пренасядане на входните данни	74
2.5.2.2. Пресмятания с пеперудки	75
2.5.3. Изчислителни предимства на БПФ	77
2.6. Обратно бързо преобразуване на Фурье	78
2.7. Реализиране на БПФ	78
2.7.1. Алгоритъм за БПФ с децимация по честота	79
2.7.2. Сравнение между алгоритмите с ДВВ и ДПЧ	79
2.7.3. Възможности за увеличаване скоростта при БПФ	79
2.8. Преобразуване на Уолш	82
2.9. Преобразуване на Адамар	87
Задачи	

### ГЛАВА 3. Корелация и конволюция

3.1. Въведение	90
----------------	----

3.2. Корелация	90
3.2.1. Взаимна корелация и автокорелация	96
3.2.2. Приложения на корелацията	103
3.2.3. Бърза корелация	109
3.3. Конволюция	114
3.3.1. Свойства на конволюцията	121
3.3.2. Кръгова (циклична) конволюция	121
3.3.3. Бърза линейна конволюция	122
3.3.4. Изчислителни предимства на бързата линейна конволюция	122
3.3.5. Пресмятане на конволюция и корелация чрез секциониране	124
3.3.6. Метод на припокриването със сумиране	127
3.3.7. Метод на припокриването с натрупване	131
3.3.8. Изчислителни предимства на бързата конволюция чрез секциониране	133
3.3.9. Връзка между конволюция и корелация	133
3.4. Реализиране на корелация и конволюция	134
3.5. Примери за приложение	134
3.5.1. Корелация	138
3.5.2. Конволюция	138
3.5.2.1. КИХ и БИХ филтри	140
3.5.2.2. Конволюционно кодиране	141
3.5.2.3. Деконволюция	141
3.5.2.4. Речеви сигнали	141
Задачи	

### ГЛАВА 4. Синусово и косинусово преобразуване на Фурье

4.1. Въведение	146
4.2. Косинусово преобразуване на Фурье (КПФ)	146
4.2.1. Дефиниции и връзка с експоненциалното преобразуване на Фурье	146
4.2.2. Основни свойства и правила	147
4.2.3. Косинус-преобразуване на Фурье за някои често срещани функции	152
4.2.3.1. КПФ на алгебрични функции	152
4.2.3.2. КПФ на експоненциални и логаритмични функции	153
4.2.3.3. КПФ на тригонометрични функции	154
4.2.3.4. КПФ на ортогонални полиноми	155
4.2.3.5. КПФ на някои специални функции	156
4.2.4. Примери за приложение на КПФ	158
4.2.4.1. Диференциране във времевата област	158
4.2.4.2. Диференциране на функция, която има точка на прекъсване с краен скок	158
4.2.4.3. Свойствата преместване във времевата	158

и честотната област		
4.2.4.4. Свойството диференциране в честотната област	158	
4.2.4.5. Свойството конволюция	159	
<b>4.3. Синус-преобразуване на Фурье (СПФ)</b>	<b>160</b>	
4.3.1. Дефиниции и връзка с експоненциалното преобразуване на Фурье	160	
4.3.2. Основни свойства и правила	161	
4.3.3. Синус-преобразуване на Фурье за някои често срещани функции	163	
4.3.3.1. СПФ на алгебрични функции	163	
4.3.3.2. СПФ на експоненциални и логаритмични функции	165	
4.3.3.3. СПФ на тригонометрични функции	166	
4.3.3.4. СПФ за ортогонални полиноми	167	
4.3.3.5. СПФ на някои специални функции	167	
<b>4.4. Дискретно синус и косинус преобразуване (ДСП и ДКП)</b>	<b>169</b>	
4.4.1. Дефиниции на ДКП и ДСП. Връзка между СПФ и КПФ	169	
4.4.2. Основни свойства и правила	170	
4.4.2.1. Свойството унитарност	170	
4.4.2.2. Обратно преобразуване	172	
4.4.2.3. Машабиране	172	
4.4.2.4. Преместване във времето	172	
4.4.2.5. Свойството разлика	173	
4.4.3. Връзка между ДКП и ДСП с Карунен-Лоев – преобразуването (КЛП)	173	
<b>4.5. Някои приложения</b>	<b>178</b>	
4.5.1. Решаване на диференциални уравнения	178	
4.5.1.1. Едномерна гранична задача	178	
4.5.1.2. Двумерна гранична задача	179	
4.5.1.3. Едномерна гранична задача, която зависи от времето	180	
4.5.2. Кепстрален анализ за обработка на речеви сигнали	180	
4.5.3. Компресия на данни	181	
4.5.4. Преобразуване на областта за обработка на сигнали		
4.5.5. Компресия на изображения чрез дискретно локално синус преобразуване (ДЛС)	183	
4.5.5.1. Основни понятия за ортогоналното преобразуване с прилокриране (ОПП)	184	
4.5.5.2. Дискретно локално синус преобразуване (ДЛС)	185	
4.5.5.3. Резултати от моделирането	186	
<b>4.6. Алгоритми за пресмятане</b>	<b>188</b>	
4.6.1. Алгоритми за БКП и БСП, които се основават на БПФ	188	
4.6.1.1. БКП на реална редица от данни	188	
4.6.1.2. БСП на редица от реални данни	189	
4.6.2. Бързи алгоритми за ДСП и ДКП чрез директна факторизация на матрицата	190	
4.6.2.1. Алгоритми с децимация по време	190	
4.6.2.2. Алгоритми с децимация по честота (ДУ)	192	
<b>4.7. Таблици на преобразуванията</b>	<b>193</b>	
4.7.1. Косинусово преобразуване на Фурье	193	
4.7.1.1. Основни свойства	193	
4.7.1.2. Алгебрични функции	194	
4.7.1.3. Експоненциални и логаритмични функции	195	
4.7.1.4. Тригонометрични функции	195	
4.7.2. Синусово преобразуване на Фурье	196	
4.7.2.1. Основни свойства	196	
4.7.2.2. Алгебрични функции	197	
4.7.2.3. Експоненциални и логаритмични функции	197	
4.7.2.4. Тригонометрични функции	198	
4.7.3. Означения и дефиниции	198	